LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách Nâng cao và phát triển Toán 9 thuộc bộ sách **Nâng cao và phát triển Toán** cấp Trung học cơ sở nhằm cung cấp cho bạn đọc, các học sinh khá và giỏi toán, các thầy cô giáo dạy Toán một tài liệu tham khảo đào sâu môn Toán dưới dạng bài tập nâng cao và các chuyên đề có kèm theo bài tập vận dụng.

Khi biên soạn bộ sách này, tác giả sử dụng các bộ sách: **Một số vấn đề phát triển Toán** cấp Trung học cơ sở xuất bản từ năm 1991; **Nâng cao và phát triển Toán** cấp Trung học cơ sở xuất bản từ năm 2002; đồng thời có sửa chữa và bổ sung để phù hợp với chương trình mới năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Ngoài các ví dụ và bài tập, trong sách có thêm phần ***Chuyên đề*** nhằm trang bị phương pháp giải Toán và mở rộng tầm nhìn. Cuối sách có ***Bài đọc thêm*** về lịch sử toán học.

Để thuận tiện cho bạn đọc, trong sách có một số kí hiệu, chẳng hạn 37 (2) cho biết ví dụ hoặc bài tập 37 ứng với kiến thức của §2 và ⌣ để chỉ các ví dụ và bài tập tương ứng ở phần Chuyên đề.

Cũng với mục đích giúp bạn đọc rèn luyện khả năng giải toán, bên cạnh những bài tập được giải kĩ và được chỉ dẫn về phương pháp, một số bài tập chỉ có những gợi ý cần thiết để bạn đọc tự giải.

Bộ sách giúp bạn đọc phát triển các năng lực tự chủ – tự học, giao tiếp – hợp tác, giải quyết vấn đề sáng tạo, trong đó chủ yếu là biết tư duy và lập luận toán học khi phân tích, tổng hợp, so sánh, đặc biệt hoá, tổng quát hoá,...; biết mô hình hoá toán học từ các tình huống thực tiễn khi xây dựng các công thức, phương trình, sơ đồ,...; biết phát hiện vấn đề và đề xuất cách giải quyết hợp lí.

Các bài tập trong sách sẽ góp phần rèn luyện các năng lực trên. Những bài toán trong sách - trong đó có những bài khó - chính là những cơ hội để bạn đọc rèn luyện.

Khi giải các bài toán trong sách, bạn hãy cố gắng tự mình tìm ra lời giải trước khi tham khảo hướng dẫn trong sách. Đừng là những chiếc bình chứa kiến thức mà hãy trở thành những động cơ được vận hành bằng lực đẩy của chính mình.

Khả năng ai cũng có rất nhiều
Thường chưa khai thác được bao nhiêu.
Hãy làm thức dậy tiềm năng đó
Để gió nâng cao những cánh diều.

Tác giả hi vọng rằng cuốn sách sẽ giúp bạn đọc phát triển những khả năng toán học còn đang tiềm ẩn để gặt hái nhiều thành công trên bước đường học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Scanned with CamScanner

CHƯƠNG IV. HÀM SỐ $y = ax^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. HÀM SỐ $y = ax^2$

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi x thuộc **R**.

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến với $x < 0$, đồng biến với $x > 0$, bằng 0 với $x = 0$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến với $x < 0$, nghịch biến với $x > 0$, bằng 0 với $x = 0$.

Đồ thị của hàm số là một parabol đi qua gốc toạ độ và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ 1. a) Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm A(0; 1) và đường thẳng d có phương trình $y = -1$.

Gọi M là một điểm bất kì thuộc parabol. Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng d.

b) Cho điểm A(0; a), gọi d là đường thẳng có phương trình $y = -a$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm M(x; y) sao cho khoảng cách MH từ M tới d bằng MA là một parabol.

Giải. a) (h.1)

Ta luôn luôn có $MH = y + 1$. (1)

Để tính MA, ta kẻ $MI \perp Oy$.

Ta có $MI = |x|$, $AI = |y - 1|$ nên

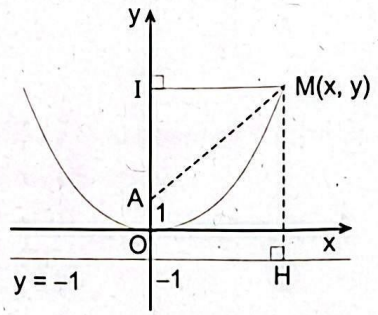
$MA^2 = MI^2 + AI^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$.

Do $y = \frac{1}{4}x^2$ nên thay x^2 bởi $4y$ ta được

$MA^2 = 4y + y^2 - 2y + 1 = (y + 1)^2$.

Do đó $MA = |y + 1| = y + 1$ (do $y \geq 0$). (2)

Từ (1) và (2) ta có MA = MH.



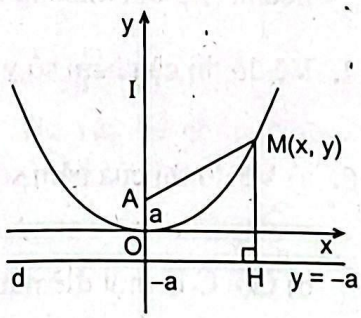
Hình 1

b) (h.2 ứng với $a > 0$) Theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm M(x; y) và A(0; a) ta có

$MA^2 = (x - 0)^2 + (y - a)^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$.

Ta lại có $MH = |y + a|$ nên

$MH^2 = (y + a)^2 = y^2 + 2ay + a^2$.



Hình 2

Scanned with CamScanner

$MA^2 = MH^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$

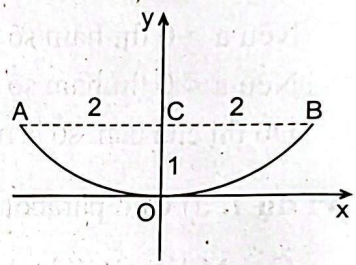
$\Leftrightarrow x^2 = 4ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a}x^2$.

Do đó quỹ tích của M là parabol $y = \frac{1}{4a}x^2$.

Chú ý: Tổng quát, cho một điểm A và đường thẳng d không đi qua A, quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách MA bằng khoảng cách từ M đến d là một parabol. Khi đó điểm A gọi là *tiêu điểm*, đường thẳng d gọi là *đường chuẩn* của parabol.

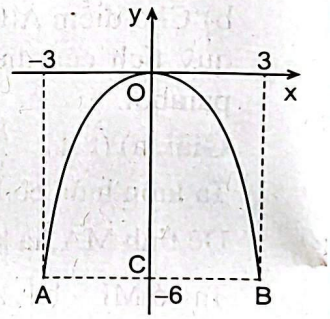
BÀI TẬP

1. Thiết diện đi qua trục của một chiếc gương có dạng parabol (h.3). Hãy xác định phương trình của parabol đó, biết rằng độ sâu OC = 1 cm và đường kính AB = 4 cm.



Hình 3

2. Một cổng dạng parabol có kích thước được chỉ ra trên hình 4 là OC = 6 m, AB = 6 m. Viết phương trình của parabol ấy.



Hình 4

3. a) Xác định hệ số a của parabol $y = ax^2$, biết rằng parabol đi qua điểm A(–2; –2).

b) Tìm toạ độ của điểm M thuộc parabol nói trên, biết rằng khoảng cách từ M đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ M đến trục tung.

4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x|x|$.

5. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b) Gọi C là một điểm tuỳ ý nằm trên parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi K là trung điểm của OC. Khi điểm C di chuyển trên parabol đó thì điểm K di chuyển trên đường nào?

Scanned with CamScanner

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Phượng trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn, a, b, c là các hệ số đã cho, $a \neq 0$.

1. Giải phương trình bậc hai một ẩn

Ví dụ 2. Cho phương trình $(m^2 - m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$ (m là tham số). (1)

a) Giải phương trình (1) với m = 1.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình (1) chỉ có một phần tử.

Giải. a) Với m = 1, phương trình (1) trở thành $-2x^2 + 4x + 1 = 0$.

$\Delta' = 2^2 - (-2).1 = 6$. Phương trình có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{-2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}; \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{-2} = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}.$$

b) Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} a = m^2 - m - 2 \neq 0 & (2) \\ \Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - m - 2) > 0 & (3) \end{cases}$$

Giải (2): $m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Giải (3): $(m + 1)^2 - (m^2 - m - 2) > 0 \Leftrightarrow 3m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Điều kiện phải tìm là: $-1 < m \neq 2$.

c) (1) chỉ có một nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) là phượng trình bậc nhất hoặc (1) là phương trình bậc hai có $\Delta = 0$. Với m = −1, (1) có dạng $0x + 1 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Với m = 2, (1) có dạng $6x + 1 = 0$, phương trình có một nghiệm là $x = -\frac{1}{6}$.

Với $m \neq -1$, $m \neq 2$, (1) là phương trình bậc hai, nó có một nghiệm (nghiệm kép) khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, trái với điều kiện trên.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) chỉ có một phần tử khi m = 2.

2. Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Ta đã biết phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$. Từ đó suy ra phương trình đó có nghiệm nếu $ac < 0$. Do vậy để chứng minh phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm, thường có các cách sau:

Cách 1. Chứng tỏ rằng $\Delta \geq 0$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi a và b:

$$(a + 1)x^2 - 2(a + b)x + (b - 1) = 0. \qquad (1)$$

Scanned with CamScanner

Giải

– Với $a \neq -1$, phương trình (1) là bậc hai, nó có nghiệm nếu

$$\Delta' = (a + b)^2 - (a + 1)(b - 1) \geq 0.$$

Đặt $a + 1 = m$, $b - 1 = n$, ta có $a + b = m + n$. Khi đó

$$\Delta' = (m + n)^2 - mn = m^2 + mn + n^2 = \left(m + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4} \geq 0.$$

Vậy (1) có nghiệm khi $a \neq -1$.

– Với $a = -1$, phương trình (1) trở thành $-2(b - 1)x = -(b - 1)$. (2)

Nếu $b \neq 1$, (2) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$. Nếu $b = 1$, (2) vô số nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm với mọi a, b.

Cách 2. Chứng tỏ rằng ac < 0 (Thật vậy, nếu $ac < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$).

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi m:

$$x^2 - (3m^2 - 5m + 1)x - (m^2 - 4m + 5) = 0. \quad (1)$$

Giải

Xét tích $ac = -(m^2 - 4m + 5) = -(m - 2)^2 - 1 < 0$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

Chú ý

a) Nếu $ac \leq 0$ mà $a \neq 0$ ta cũng có $\Delta \geq 0$ nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

b) Chỉ với điều kiện $ac \leq 0$, chưa đảm bảo phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm. Chẳng hạn ta xét phương trình $m^2x^2 - mx - 2 = 0$, ta có $ac = -2m^2 \leq 0$, nhưng với $m = 0$ thì phương trình trở thành $0x = 2$, vô nghiệm.

Như vậy khi gặp trường hợp $ac \leq 0$, phải xét hai trường hợp: $a \neq 0$ và $a = 0$.

3. Nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc hai

Ví dụ 5. Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ (1) với m, n là những số nguyên.

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là số nguyên.

b) Tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình (1) với $n = 3$.

Giải. a) Nếu (1) có nghiệm $x = 0$ thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu (1) có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{a}{b} \neq 0$ với $a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{N}^*$, $(|a|, b) = 1$.

Thay vào (1) được $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + m.\frac{a}{b} + n = 0$ nên $a^2 = -mab - nb^2 = -b(ma + nb)$.

Suy ra $a^2 \vdots b$. Ta lại có $(|a|, b) = 1$ nên $b = 1$. Do đó x là số nguyên.

Scanned with CamScanner

b) Với n = 3 thì (1) trở thành $x^2 + mx + 3 = 0$. (2)

Ta có $\Delta = m^2 - 12$.

(2) có nghiệm hữu tỉ $\Leftrightarrow \Delta$ là số chính phương, tức là

$m^2 - 12 = k^2$ ($k \in \mathbf{N}$) $\Leftrightarrow m^2 - k^2 = 12 \Leftrightarrow (m + k)(m - k) = 12$.

Ta thấy m + k và m – k là ước của 12, hiệu của chúng bằng (m + k) – (m – k) = 2k là số chẵn nên m + k và m – k phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do tích của chúng là số chẵn (12) nên chúng cùng chẵn. Chú ý rằng m + k ≥ m – k nên chỉ có hai trường hợp:

$\begin{cases} m + k = 6 \\ m - k = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} m + k = -2 \\ m - k = -6 \end{cases}$.

Trường hợp đầu cho m = 4. Phương trình (2) là $x^2 + 4x + 3 = 0$, nó có nghiệm

$x_1 = -1, x_2 = -3$.

Trường hợp sau cho m = –4. Phương trình (2) là $x^2 - 4x + 3 = 0$, nó có nghiệm

$x_1 = 1, x_2 = 3$.

Kết luận: Khi n = 3 thì:

Với m = 4, phương trình (2) có nghiệm hữu tỉ là –1 và –3.

Với m = –4, phương trình (2) có nghiệm hữu tỉ là 1 và 3.

Với $m \neq \pm 4$, phương trình (2) không có nghiệm hữu tỉ.

Chú ý: Có thể giải phương trình (2) bằng cách sử dụng hệ thức Viète (§3). Nếu (2) có nghiệm hữu tỉ thì chúng là số nguyên (theo câu a)) và có tích bằng 3, tổng bằng –m. Ta tìm được các nghiệm đó là –1 và –3 (khi đó m = 4) hoặc 1 và 3 (khi đó m = –4).

4. Nghiệm nguyên của phương trình bậc hai

Ví dụ 6. Tìm các số nguyên n để các nghiệm của phương trình sau là các số nguyên:

$$x^2 - (4 + n)x + 2n = 0. \quad (1)$$

Giải. Ta có $\Delta = (4 + n)^2 - 8n = n^2 + 16 > 0$.

Nếu nghiệm của phương trình (1) là số nguyên thì $n^2 + 16$ phải là số chính phương.

Đặt $n^2 + 16 = k^2$ với $k \in \mathbf{N}$, ta có $n^2 - k^2 = -16 \Leftrightarrow (n + k)(n - k) = -16$.

Ta thấy (n + k) – (n – k) = 2k là số chẵn nên n + k và n – k phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do tích của chúng là số chẵn (–16) nên chúng cùng chẵn.

Do n + k ≥ n – k nên có các trường hợp:

n + k	8	2	4
n – k	–2	–8	–4
n	3	–3	0

Với n = 3 thì phương trình (1) trở thành $x^2 - 7x + 6 = 0$, có các nghiệm là 1 và 6.

Với n = –3 thì phương trình (1) trở thành $x^2 - x - 6 = 0$, có các nghiệm là –2 và 3.

Scanned with CamScanner

Với n = 0 thì phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x = 0$, có các nghiệm là 0 và 4.

Vậy với $n \in \{3; -3; 0\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

5. Quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình bậc hai

Ví dụ 7. Tìm các giá trị của a để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

$$x^2 + ax + 8 = 0, \quad (1)$$

$$\text{và } x^2 + x + a = 0. \quad (2)$$

Giải. Giả sử x_0 là nghiệm chung cửa hai phương trình, ta có

$x_0^2 + ax_0 + 8 = 0$ và $x_0^2 + x_0 + a = 0$ (*). Suy ra $(a - 1)x_0 + 8 - a = 0$.

– Nếu $a \neq 1$ thì $x_0 = \dfrac{a - 8}{a - 1}$. Thay vào (*) và rút gọn được

$a^3 - 24a + 72 = 0 \Leftrightarrow (a + 6)(a^2 - 6a + 12) = 0 \Leftrightarrow a = -6$.

Với a = –6 thì (1) trở thành $x^2 - 6x + 8 = 0$, có nghiệm là 2 và 4; (2) trở thành $x^2 + x - 6 = 0$, có nghiệm là 2 và –3. Do đó (1) và (2) có một nghiệm chung là 2.

– Nếu a = 1 thì (1) trở thành $x^2 + x + 8 = 0$, (2) trở thành $x^2 + x + 1 = 0$. Cả hai phương trình đều vô nghiệm.

Kết luận: Với a = –6 thì (1) và (2) có một nghiệm chung.

BÀI TẬP

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

6. Cho phương trình $mx^2 + 6(m - 2)x + 4m - 7 = 0$.

Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho:

a) Có nghiệm kép; b) Có hai nghiệm phân biệt; c) Vô nghiệm.

7. Giải các phương trình sau với m là tham số:

a) $x^2 - mx - 3(m + 3) = 0$; b) $mx^2 - 4x + 4 = 0$.

8. Tìm các giá trị của m, biết rằng phương trình $x^2 + mx + 12 = 0$ có hiệu hai nghiệm bằng 1.

9. Cho các số dương a, b thoả mãn $a + b = 4\sqrt{ab}$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$.

10. Tìm x và y biết rằng $2(x^2 + 1) + y^2 = 2y(x + 1)$.

11. Tìm số dương x, biết rằng $x = \dfrac{a(b - c)}{b(c - a)} = \dfrac{b(c - a)}{c(b - a)}$.

ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM

12. Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$; b) $(m + 1)x^2 - 2x + (m - 1) = 0$.

Scanned with CamScanner

13. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm với mọi a và b:

a) $x(x-a)+x(x-b)+(x-a)(x-b)=0$;

b) $x^2+(a+b)x-2(a^2-ab+b^2)=0$.

14. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm với mọi a, b và c:

a) $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$;

b) $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$.

15. Chứng minh rằng nếu a, b, c là những số khác 0 thì tồn tại một trong các phương trình sau có nghiệm: $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$.

16. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có nghiệm, biết rằng $5a+2c=b$.

17. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $(a^2+b^2-c^2)x^2-4abx+(a^2+b^2-c^2)=0$.

18. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có nghiệm nếu $2b\geq c+4a$.

19. Chứng minh rằng nếu $bm=2(c+n)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2+bx+c=0$ và $x^2+mx+n=0$.

NGHIỆM HỮU TỈ CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

20. Cho a, b, c là những số hữu tỉ, $a\neq 0$ và $|b|=|a+c|$. Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ là những số hữu tỉ.

21. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ, nếu:

a) a, b, c là những số nguyên lẻ; b) $\overline{abc}$ là số nguyên tố.

22. Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của phương trình sau là số hữu tỉ:

$$mx^2-2(m-1)x+(m-4)=0.$$

NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

23. Tìm các số nguyên n để các nghiệm của phương trình sau là những số nguyên:

$$x^2-(n+4)x+(4n-25)=0.$$

24. Tìm số nguyên tố p, biết rằng phương trình $x^2+px-12p=0$ có hai nghiệm đều là những số nguyên.

25. Cho các số nguyên dương a, b, c nguyên tố cùng nhau đôi một thoả mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $a+b$ là số chính phương.

26. Tìm các số a, b, c nguyên dương sao cho các phương trình $x^2-2ax+b=0$, $x^2-2bx+c=0$, $x^2-2cx+a=0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương.

QUAN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM CỦA HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

27. Tìm các giá trị của m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

a) $x^2+2x+m=0$ và $x^2+mx+2=0$;

b) $x^2+mx+1=0$ và $x^2-x-m=0$;

Scanned with CamScanner

28. Tìm các giá trị của m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

a) $x^2 + (m-2)x + 3 = 0$ và $2x^2 + mx + (m+2) = 0$;

b) $2x^2 + (3m-5)x - 9 = 0$ và $6x^2 + (7m-15)x - 19 = 0$.

29. Tìm các giá trị nguyên của m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

$$2x^2 + (3m-1)x - 3 = 0 \ (1) \text{ và } 6x^2 - (2m-3)x - 1 = 0 \ (2).$$

30. Tìm các giá trị của m để một nghiệm của phương trình $2x^2 - 13x + 2m = 0$ (1) gấp đôi một nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + m = 0$. (2)

31. Cho các phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

$$cx^2 + bx + a = 0. \quad (2)$$

Biết phương trình (1) có nghiệm dương m, chứng minh rằng phương trình (2) có nghiệm n sao cho $m + n \geq 2$.

~ **Ví dụ:** 37, 49 đến 51, 53 đến 55.

Bài tập: 124 đến 126, 147, 148, 151 đến 153, 155 đến 160.

§3. HỆ THỨC VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

1. Hệ thức Viète

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm ($\Delta \geq 0$) thì tổng các nghiệm bằng $-\frac{b}{a}$, tích các nghiệm bằng $\frac{c}{a}$.

Áp dụng

a) Tính nhẩm nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). (1)

– Nếu $a + b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$.

– Nếu $a - b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

b) Xác định dấu của các nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Gọi $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Ta có:

<table>
<tr><td>$P < 0$</td><td colspan="2">Hai nghiệm trái dấu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta \geq 0$
và $P > 0$</td><td rowspan="2">Hai nghiệm
cùng dấu</td><td>$S > 0$: Hai nghiệm dương</td></tr>
<tr><td>$S < 0$: Hai nghiệm âm</td></tr>
</table>

Scanned with CamScanner

2. Tìm hai số biết tổng và tích

Muốn tìm hai số biết tổng của chúng bằng S, tích của chúng bằng P, ta chỉ cần giải phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Ví dụ 8. Cho phương trình với tham số m: $mx^2 - 2(m + 1)x + (m - 4) = 0$. (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu. Khi đó trong hai nghiệm, nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn?

c) Xác định m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thoả mãn $x_1 + 4x_2 = 3$.

d) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

Giải. a) Với m = 0 thì (1) có dạng $-2x - 4 = 0$, có nghiệm $x = -2$.

Với $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai, $\Delta' = (m + 1)^2 - m(m - 4) = 6m + 1$. Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$, tức là $m \geq -\frac{1}{6}$.

Kết luận: Với $m \geq -\frac{1}{6}$ thì (1) có nghiệm.

b) Theo hệ thức Viète, ta có $S = \frac{2(m + 1)}{m}$, $P = \frac{m - 4}{m}$.

Điều kiện để (1) có hai nghiệm trái dấu là: $P < 0 \Leftrightarrow \frac{m - 4}{m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Khi đó, do $0 < m < 4$ nên $S > 0$, do đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

c) Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m} & (2) \\ x_1 x_2 = \frac{m-4}{m} & (3) \\ x_1 + 4x_2 = 3 & (4) \\ m \geq -\frac{1}{6} & (5) \end{cases}$$

Từ (2) và (4) tính được $x_2 = \frac{m - 2}{3m}$, $x_1 = \frac{5m + 8}{3m}$.

Thay vào (3) được $\frac{(m - 2)(5m + 8)}{9m^2} = \frac{m - 4}{m}$.

Giải phương trình này được $2m^2 - 17m + 8 = 0$, do đó $m = 8$; $m = \frac{1}{2}$, điều kiện (5) được thoả mãn.

Vậy với $m \in \left\{\frac{1}{2}; 8\right\}$ thì phương trình (1) có nghiệm thoả mãn đề bài.

Scanned with CamScanner

d) Với $m \geq -\frac{1}{6}$ thì ta có $x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m}$, $x_1x_2 = 1 - \frac{4}{m}$.

Thay $\frac{2}{m} = x_1 + x_2 - 2$ vào biểu thức của x_1x_2 ta được $x_1x_2 = 1 - 2(x_1 + x_2 - 2)$.

Vậy $x_1x_2 = 5 - 2(x_1 + x_2)$.

Ví dụ 9. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + (m-3) = 0$. Tìm các giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Giải. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) là $m \neq 0$, $\Delta' \geq 0$.

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4;\ \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Với $0 \neq m \leq 4$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2. Theo hệ thức Viète ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m},\ x_1x_2 = \frac{m-3}{m}.$$

Do đó $1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{4(m-2)^2}{m^2} - \frac{2(m-3)}{m}$

$\Leftrightarrow m^2 = 4m^2 - 16m + 16 - 2m^2 + 6m \Leftrightarrow 0 = m^2 - 10m + 16 \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = 8$.

Giá trị $m = 8$ không thoả mãn điều kiện $0 \neq m \leq 4$. Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 10. Cho phương trình $x^2 + 2mx + (m-2) = 0$. Tìm các giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình thoả mãn điều kiện $|x_1| + |x_2| = 4$.

Giải. $\Delta' = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{3}{4} > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm x_1, x_2. Theo hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1x_2 = m - 2$.

$$|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 2|x_1x_2| = 16$$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 16 \Leftrightarrow 2m^2 - x_1x_2 + |x_1x_2| = 8$ (1)

Xét $x_1x_2 \geq 0$ thì $m - 2 \geq 0$, (1) là $2m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Chọn $m = 2$.

Xét $x_1x_2 < 0$ thì $m - 2 < 0$, (1) là $2m^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow m^2 - (m-2) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 2$. Chọn $m = -1$.

Kết luận: $m \in \{2; -1\}$.

Ví dụ 11. Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm c và d, phương trình $x^2 + cx + d = 0$ có hai nghiệm a và b. Tính a, b, c, d, biết rằng các số đó đều khác 0.

Giải. Áp dụng hệ thức Viète vào hai phương trình đã cho, ta được:

$$c + d = -a \quad (1), \qquad cd = b \quad (2)$$

Scanned with CamScanner

$a + b = -c$ (3), $ab = d$ (4).

Từ (1) suy ra $a + c = -d$. Từ (3) suy ra $a + c = -b$. Do đó $b = d$.

Từ (2), do $b = d \neq 0$, ta có $c = 1$. Từ (4) do $b = d \neq 0$, ta có $a = 1$.

Thay $a = c = 1$ vào (1), tá được $d = -2$, suy ra $b = -2$.

Ví dụ 12. Cho phương trình $x^2 + 5x - 1 = 0$. (1)

Không giải phương trình (1), hãy lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là luỹ thừa bậc bốn của các nghiệm của phương trình (1).

Giải. Ta thấy phương trình (1) có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho, ta có $x_1 + x_2 = -5$, $x_1x_2 = -1$.

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập, ta được

$y_1 + y_2 = x_1^4 + x_2^4$, $y_1y_2 = x_1^4x_2^4$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 + 2 = 27$.

Do đó $y_1 + y_2 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 729 - 2 = 727$.

$y_1y_2 = (x_1x_2)^4 = (-1)^4 = 1$.

Phương trình phải lập có tổng các nghiệm bằng 727 và tích các nghiệm bằng 1 nên có dạng $y^2 - 727y + 1 = 0$.

BÀI TẬP

32. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

a) $mx^2 - 2(m - 1)x + (m - 2) = 0$; b) $(m - 1)x^2 + (m + 1)x + 2 = 0$.

33. Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình (nếu có):

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; b) $5x^2 + 3x - 1 = 0$;

c) $2x^2 + 13x + 8 = 0$; d) $4x^2 - 11x + 8 = 0$.

34. Phương trình $x^2 + mx + 8 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Chứng minh rằng

$$|x_1 + x_2| > 4\sqrt{2}.$$

35. Xác định giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt cùng dấu:

$$(m - 1)x^2 - 2x + 3 = 0.$$

36. Tìm các giá trị của a để hai nghiệm của phương trình $x^2 - 45x + a = 0$ đều là các số nguyên tố.

37. Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$, biết rằng phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt và m, n là các số nguyên tố.

38. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính:

Scanned with CamScanner

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; b) $(x_1-x_2)^2$; c) $x_1^3+x_2^3$.

39. Cho phương trình $x^2-2(m-2)x+(m^2+2m-3)=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thoả mãn

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{5}.$$

40. Cho phương trình $x^2-2mx+(4m-1)=0$.

Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1>x_2)$ thoả mãn $x_1-x_2=2$.

41. Cho phương trình $x^2+mx-3=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\sqrt{-x_1}=\sqrt{3x_2}$.

42. Cho phương trình $x^2+mx+n=0$ có $3m^2=16n$. Chứng minh rằng trong hai nghiệm của phương trình, có một nghiệm gấp ba lần nghiệm kia.

43. Cho biết phương trình $x^2-(m+2)x+(2m-1)=0$ có các nghiệm x_1, x_2. Lập một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m.

44. Tìm hai số, biết rằng:

a) Tổng của chúng bằng 2, tích của chúng bằng –1.

b) Tổng của chúng bằng 1, tích của chúng bằng 5.

45. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng:

a) $\sqrt{3}$ và $2\sqrt{3}$; b) $2-\sqrt{3}$ và $2+\sqrt{3}$.

46. Cho $x+\frac{1}{x}=2$ và $y+\frac{1}{y}=3$. Không tính giá trị của x và y, tính giá trị của biểu thức

$a=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

47. Chứng minh rằng tồn tại một phương trình có các hệ số hữu tỉ nhận một trong các nghiệm là:

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

48. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng:

a) Bình phương của các nghiệm của phương trình $x^2-2x-1=0$;

b) Nghịch đảo của các nghiệm của phương trình $x^2+mx-2=0$.

49. Xác định các số m, n sao cho các nghiệm của phương trình $x^2+mx+n=0$ cũng là m và n.

Scanned with CamScanner

50. Chứng minh rằng tồn tại các đa thức A(x) và B(x) có các hệ số nguyên sao cho $\frac{A\left(\sqrt{2}+1\right)}{B\left(\sqrt{2}+1\right)}$ bằng: a) 2; b) $\sqrt{2}$.

51. Cho các số a, b, c khác nhau đôi một, $c \neq 0$. Biết rằng các phương trình

$$x^2 + ax + bc = 0 \quad (1) \text{ và } x^2 + bx + ca = 0 \quad (2)$$

có ít nhất một nghiệm chung.

a) Tìm các nghiệm còn lại của hai phương trình.

b) Chứng minh rằng các nghiệm còn lại đó là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

52. Cho các phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + dx + a = 0$. (2)

Biết rằng phương trình (1) có các nghiệm m và n, phương trình (2) có các nghiệm p và q. Chứng minh rằng $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$.

53*. Cho các phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$. (2)

Tìm một hệ thức giữa các hệ số a, b, c, biết rằng các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) và các nghiệm x_3, x_4 của phương trình (2) thoả mãn đẳng thức

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4.$$

54. Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm x_1, x_2; phương trình $x^2 - b^2x + bc = 0$ có các nghiệm x_3, x_4. Biết $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Xác định b và c.

55*. Tìm các số a, b sao cho các phương trình $x^2 + ax + 6 = 0$ và $x^2 + bx + 12 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung và $|a| + |b|$ nhỏ nhất.

56*. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Kí hiệu $s_n = x_1^n + x_2^n$ với n là số nguyên dương.

a) Tính s_1, s_2, s_3. b) Tìm một hệ thức giữa s_n, s_{n+1}, s_{n+2}.

c) Chứng minh rằng s_n là số nguyên với mọi số n nguyên dương.

d) Tìm số dư khi chia s_{50} cho 5.

~ **Ví dụ:** 38 đến 41, 56, 57.

Bài tập: 127 đến 136.

§4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO

Ta gọi *phương trình đại số bậc n* là các phương trình đưa được về dạng

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

trong đó n nguyên dương, x là ẩn, a_1, a_2, ..., a_n là các số thực cho trước, $a_n \neq 0$.

Scanned with CamScanner

Phương trình đại số bậc n thường được giải bằng cách quy về các phương trình bậc nhất và bậc hai.

Sau đây là một số phương pháp thường dùng để giải phương trình bậc cao hơn hai.

1. Đưa về phương trình tích

Ví dụ 13. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$.

Giải. $x^3 + 2x(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2^3} = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 2) + 2x(x + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})[x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2] = 0.$

Phương trình $x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm $x = -\sqrt{2}$.

Phương trình $x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2 = 0$ vô nghiệm (vì $\Delta < 0$).

Phương trình đã cho có một nghiệm là $x = -\sqrt{2}$.

2. Đặt ẩn phụ

Ví dụ 14. Giải phương trình $\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

Giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng $2\sqrt{2}x^3 + 3.2x^2 - 4 = 0$. Đặt $y = x\sqrt{2}$, phương trình trở thành

$$y^3 + 3y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $-\sqrt{2}$.

Ví dụ 15. Giải các phương trình:

a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$; (1)

b) $x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. (2)

Giải. a) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Chia hai vế của (1) cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 + 3y + 2 = 0$. Do đó $y_1 = -1$; $y_2 = -2$.

Với $y = -1$, ta có $x + \dfrac{1}{x} = -1$ nên $x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Với $y = -2$, ta có $x + \dfrac{1}{x} = -2$ nên $(x + 1)^2 = 0$, do đó $x = -1$.

Kết luận: $S = \{-1\}$.

Scanned with CamScanner

Chú ý. a) Cũng có thể giải phương trình (1) bằng cách biến đổi vế trái thành

$$(x + 1)^2(x^2 + x + 1).$$

b) Ta thấy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (2) vì tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ. Biến đổi phương trình (2) thành

$$(x + 1)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0.$ (3)

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của (3). Chia hai vế của (3) cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 - 2x + 5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 - 2y + 3 = 0$, vô nghiệm.

Kết luận: $S = \{-1\}$.

c) Phương trình ở câu a có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq 0)$ gọi là phương trình *đối xứng* bậc bốn. Để giải phương trình loại này, ta chia hai vế của phương trình cho x^2 (vì $x \neq 0$) rồi đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$. Khi đó

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geq 2 + 2 = 4, \text{ do đó } |y| \geq 2.$$

Chú ý rằng nếu m là nghiệm của phương trình đối xứng thì $\frac{1}{m}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

d) Phương trình đối xứng bậc lẻ (chẳng hạn phương trình đối xứng bậc năm $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$) bao giờ cũng nhận -1 là một nghiệm. Do đó ta có thể hạ bậc để đưa về phương trình đối xứng bậc chẵn.

e) Cách chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ cũng được sử dụng đối với các phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ trong đó } \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2,$$

gọi là phương trình *hồi quy*. Ẩn phụ có dạng $y = x + \frac{d}{bx}$.

Ví dụ 16. Giải phương trình $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2$. (1)

Giải. *Cách 1.* $(1) \Leftrightarrow 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) = 3x^2$

$$\Leftrightarrow 4\left(x + 17 + \frac{60}{x}\right)\left(x + 16 + \frac{60}{x}\right) = 3 \text{ (vì } x \neq 0). \quad (2)$$

Scanned with CamScanner

Đặt $x + 16 + \frac{60}{x} = y$ thì (2) trở thành

$4y(y + 1) = 3 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2};\ y = -\frac{3}{2}$.

Với $y = \frac{1}{2}$ ta có $2x^2 + 31x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = -8;\ x = \frac{-15}{2}$.

Với $y = -\frac{3}{2}$ ta có $2x^2 + 35x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$.

Cách 2. Đặt $x^2 + 16{,}5x + 60 = y$, từ phương trình đã cho ta được $y^2 = x^2$.

Xét hai trường hợp $y = x$ và $y = -x$ ta được bốn nghiệm của phương trình.

Chú ý. a) Phương trình (1) nói trên có dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = mx^2$ trong đó $ad = bc$. Ta nhóm

$$[(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] = mx^2.$$

Ẩn phụ có thể đặt là $y = x + \frac{ad}{x}$ (hoặc sai khác một hằng số như cách 1) hoặc $y = (x + a)(x + d)$ (như cách 2).

b) Đối với các phương trình có dạng $d(x + a)(x + b)(x + c) = mx$ (xem bài 65b) trong đó $d = \frac{a + b + c}{2}$, $m = (d - a)(d - b)(d - c)$, ta đặt ẩn phụ $y = x + d$. Một nghiệm của phương trình là $y = 0$.

c) Đối với các phương trình có dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ trong đó $a + d = b + c$ (xem bài tập 64a, b, c, d) ta nhóm

$$[(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] = m,$$

từ đó đi đến cách đặt ẩn phụ.

d) Đối với các phương trình có dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ (xem bài tập 66b, c, d) ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \frac{a + b}{2}$.

Ví dụ 17. Giải phương trình $x^4 + (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$. (1)

Giải. *Cách 1.* (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2(x - 1) - 2(x - 1)^2 = 0$.

Đặt $y = x^2$, $z = x - 1$ ta có $y^2 + yz - 2z^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)(y + 2z) = 0$.

Với $y - z = 0$ thì $x^2 - x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Với $y + 2z = 0$ thì $x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Cách 2. $x = 1$ không thoả mãn phương trình. Chia hai vế của (1) cho $(x - 1)^2$ được

Scanned with CamScanner

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{x^2-2(x-1)}{x-1}=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{x^2}{x-1}-2=0.$$

Đặt $\frac{x^2}{x-1}=y$, ta có $y^2+y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-2.\end{array}\right.$

Với $y=1$ thì $x^2=x-1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$, vô nghiệm.

Với $y=-2$ thì $x^2=-2(x-1)\Leftrightarrow x^2+2x-2=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$.

3. Đưa hai vế về luỹ thừa cùng bậc

Ví dụ 18. Giải phương trình $x^4=24x+32$.

Giải. Thêm $4x^2+4$ vào hai vế được $x^4+4x^2+4=4x^2+24x+36$

$$\Leftrightarrow(x^2+2)^2=(2x+6)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2+2=2x+6 & (1)\\x^2+2=-2x-6. & (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có nghiệm $x=1\pm\sqrt{5}$, phương trình (2) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm $x=1\pm\sqrt{5}$.

Ví dụ 19*. Giải phương trình $x^3+3x^2-3x+1=0$.

Giải. $x^3=-3x^2+3x-1\Leftrightarrow 2x^3=x^3-3x^2+3x-1$

$$\Leftrightarrow(x\sqrt[3]{2})^3=(x-1)^3\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{2}=x-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Phương pháp đặt ẩn phụ đặc biệt có hiệu quả khi giải nhiều phương trình chứa ẩn ở mẫu. Nếu không đặt ẩn phụ, sau khi đưa về dạng nguyên, nhiều khi ta phải giải các phương trình bậc cao khá phức tạp. Sau đây là một số cách biến đổi thường dùng.

1. Chia tử và mẫu của phân thức cho x

Ví dụ 20. Giải phương trình $\frac{2x}{3x^2-x+2}-\frac{7x}{3x^2+5x+2}=1$.

Giải. Điều kiện $x\neq-1$, $x\neq-\frac{2}{3}$. Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho $x\neq0$ được $\frac{2}{3x-1+\frac{2}{x}}-\frac{7}{3x+5+\frac{2}{x}}=1$.

Đặt $3x+2+\frac{2}{x}=y$, phương trình trở thành $\frac{2}{y-3}-\frac{7}{y+3}=1$.

Scanned with CamScanner

Điều kiện: $y \neq \pm 3$. Bạn đọc tự giải tiếp. *Đáp số:* $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$.

Chú ý: Ta thường dùng phương pháp trên đối với các phương trình có dạng sau:

a) *Dạng 1*: $\dfrac{mx}{ax^2 + bx + d} + \dfrac{nx}{ax^2 + cx + d} = p$.

b) *Dạng 2*: $\dfrac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \dfrac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = 0$.

c) *Dạng 3*: $\dfrac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \dfrac{px}{ax^2 + qx + c} = 0$.

Trong mỗi dạng trên, các tam thức bậc hai trong phương trình đều có hệ số cao nhất bằng nhau về hệ số tự do bằng nhau.

2. Thêm cùng một biểu thức vào hai vế để tạo thành bình phương đúng (đưa phương trình về dạng $A^2 = B^2$)

Ví dụ 21. Giải phương trình $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$. (1)

Giải. Điều kiện: $x \neq -2$.

Để đưa phương trình về dạng $\left(x + 2 - \dfrac{2x}{x+2}\right)^2 = B^2$, ta thêm 4 vào hai vế.

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4x + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2(x+2)\cdot\frac{2x}{x+2} + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \left(x + 2 - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 - \dfrac{2x}{x+2} = 4 \quad (2) \\ x + 2 - \dfrac{2x}{x+2} = -4. \quad (3) \end{array}\right.$$

(2) có nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{5}$, (3) vô nghiệm. Vậy $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

3. Đặt hai ẩn phụ rồi tìm liên hệ giữa chúng

Ví dụ 22. Giải phương trình $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48.\dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$ (1)

Giải. Điều kiện $x \neq \pm 1$. Đặt $\dfrac{x-2}{x+1} = y$, $\dfrac{x+2}{x-1} = z$, ta được

$$20y^2 - 5z^2 + 48yz = 0. \quad (2)$$

Cách 1. Nếu $z = 0$ thì $y = 0$, loại.

Scanned with CamScanner

Nếu $z \neq 0$, chia hai vế của (2) cho z^2 được $20\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 48.\frac{y}{z} - 5 = 0.$ (3)

Đặt $\frac{y}{z} = a$, ta được $a = \frac{1}{10}$, $a = -\frac{5}{2}$. Từ đó tìm được y, z, x. *Đáp số:* $x = 3$, $x = \frac{2}{3}$.

Cách 2. (2) $\Leftrightarrow (10y - z)(2y + 5z) = 0$. Từ đó tìm được x.

III. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Ví dụ 23. Giải phương trình $x^2 - 1 = 2\sqrt{2x+1}$.

Giải. Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Cộng $2x + 2$ vào hai vế được

$$x^2 - 1 + 2x + 2 = 2x + 1 + 2\sqrt{2x+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = \sqrt{2x+1} + 1 \\ x + 1 = -\sqrt{2x+1} - 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{2x+1} & (1) \\ x + 2 = -\sqrt{2x+1} & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x + 1 \end{cases}$. Giải $x^2 - 2x - 1 = 0$, chọn $x = 1 + \sqrt{2}$.

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \leq 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 2x + 1 \end{cases}$. Giải $x^2 + 2x + 3 = 0$, vô nghiệm.

Vậy $x = 1 + \sqrt{2}$.

Ví dụ 24. Cho phương trình $\sqrt{18x + 44} - \sqrt{6x + 8} = 2x + 6$. (1)

Hãy chỉ ra thiếu sót trong lời giải dưới đây khi giải phương trình (1).

Điều kiện: $x \geq -\frac{4}{3}$. (2)

Nhân và chia vế trái của (1) với biểu thức liên hợp của vế trái được

$$\frac{(18x + 44) - (6x + 8)}{\sqrt{18x + 44} + \sqrt{6x + 8}} = 2x + 6 \Leftrightarrow \frac{12x + 36}{\sqrt{18x + 44} + \sqrt{6x + 8}} = 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 3}{\sqrt{18x + 44} + \sqrt{6x + 8}} = \frac{x + 3}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 3 = 0 & (3) \\ \sqrt{18x + 44} + \sqrt{6x + 8} = 6 & (4) \end{array}\right.$$

Giải (3) được $x = -3$, loại vì không thoả mãn (2).

Giải (4), kết hợp với (1) ta có

Scanned with CamScanner

$\begin{cases}\sqrt{18x+44}+\sqrt{6x+8}=6\\ \sqrt{18x+44}-\sqrt{6x+8}=2x+6\end{cases}$ nên $\sqrt{18x+44}=\dfrac{6+(2x+6)}{2}=x+6$.

Do (2) nên $x+6>0$. Ta có $18x+44=(x+6)^2$

$\Leftrightarrow 18x+44=x^2+12x+36 \Leftrightarrow x^2-6x-8=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{17}$, thoả mãn (2).

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=3\pm\sqrt{17}$.

Giải. Theo quy tắc tìm hai số biết tổng và hiệu, ta có

$\sqrt{18x+44}=\dfrac{6+(2x+6)}{2}=x+6$ và $\sqrt{6x+8}=\dfrac{6-(2x+6)}{2}=-x$. Do đó

$\begin{cases}\sqrt{18x+44}+\sqrt{6x+8}=6\\ \sqrt{18x+44}-\sqrt{6x+8}=2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{18x+44}=x+6\\ \sqrt{6x+8}=-x.\end{cases}$

Điều kiện của ẩn không chỉ có thêm $x+6\ge 0$ (tức là $x\ge -6$) mà còn có thêm $-x\ge 0$ (tức là $x\le 0$). Như vậy điều kiện của ẩn là $-\dfrac{4}{3}\le x\le 0$. Loại $x=3+\sqrt{17}>0$, chọn $x=3-\sqrt{17}$.

Nghiệm của phương trình (1) là $x=3-\sqrt{17}$.

Ví dụ 25. Giải phương trình $x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}}=2$.

Giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{4}$. Đặt $\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=y\ge 0$ thì $x=y^2-\dfrac{1}{4}$.

Thay vào phương trình đã cho và chú ý rằng $y\ge 0$, ta được

$$y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}+y}=2 \Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}+y+\frac{1}{2}=2$$

$$\Leftrightarrow y^2+y+\frac{1}{4}=2 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=(\sqrt{2})^2.$$

Do $y\ge 0$ nên $y+\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$, do đó $y=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $x=\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=2-\sqrt{2}$, thoả mãn điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{4}$.

Nghiệm của phương trình là $x=2-\sqrt{2}$.

Ví dụ 26. Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

Giải. Điều kiện: $x\ne 0$, $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. (1)

Scanned with CamScanner

Đặt $\sqrt{2-x^2} = y > 0$ (2)

thì $2 - x^2 = y^2$. Khi đó ta có $x^2 + y^2 = 2$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$.

Đặt $S = x + y$, $P = xy$, các điều kiện trên trở thành $S^2 - 2P = 2$ và $S = 2P$.

Dễ dàng tìm được $P = 1$, $S = 2$ và $P = -\frac{1}{2}$, $S = -1$.

Với $P = 1$, $S = 2$ thì x, y là nghiệm của $X^2 - 2X + 1 = 0$. Ta được $X = 1$, do đó $x = 1$, $y = 1$ thoả mãn (1) và (2).

Với $P = -\frac{1}{2}$, $S = -1$ thì x, y là nghiệm của $2X^2 + 2X - 1 = 0$. Ta được $X = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Do $y > 0$ nên $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x = 1$; $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 27. Giải và biện luận phương trình $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$ (a là tham số).

Giải. Đặt $\sqrt{a + x} = y$, phương trình trở thành $\sqrt{a - y} = x$. Phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, & (1) \\ x^2 = a - y, & (2) \\ y^2 = a + x. & (3) \end{cases}$$

Khử a từ (2) và (3) được ,

$x^2 - y^2 = -(x + y) \Leftrightarrow (x + y)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = -x$ hoặc $y = x + 1$.

a) Trường hợp $y = -x$. Do $x \geq 0$, $y \geq 0$ nên $x = y = 0$. Khi đó $a = 0$.

b) Trường hợp $y = x + 1$. Thay vào (3) được

$$(x + 1)^2 = a + x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - a = 0. \quad (4)$$

(4) có nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$ với $a \geq \frac{3}{4}$. Do (1) ta loại $x = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$.

Giải điều kiện $\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \geq 0$ được $a \geq 1$.

Kết luận: Nếu $a = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Nếu $a \geq 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$.

Nếu $0 \neq a < 1$, phương trình vô nghiệm.

Scanned with CamScanner

IV. MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Ví dụ 28. Tìm các giá trị của m để tồn tại các số x, y thoả mãn cả hai phương trình:

$$4x - 3y = 7 \quad (1) \qquad \text{và} \qquad 2x^2 + 5y^2 = m. \quad (2)$$

Giải. Rút x ở (1), thay vào (2) và rút gọn được $49y^2 + 42y + (49 - 8m) = 0$. (3)

Từ (1) ta thấy nếu tồn tại y thì cũng tồn tại x. Do đó chỉ cần tìm điều kiện để (3) có nghiệm. Ta phải có

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 21^2 - 49(49 - 8m) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - (49 - 8m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5.$

Vậy với $m \geq 5$ thì tồn tại các số x, y thoả mãn cả hai phương trình (1) và (2).

Ví dụ 29. Tìm các cặp số (x;y) thoả mãn cả hai phương trình

$$x^2 + y^2 + x + y = 18 \text{ và } xy(x+1)(y+1) = 72.$$

Giải. Đặt $x(x+1) = a$, $y(y+1)b$, ta có $a + b = 18$ và $ab = 72$.

Ta có a và b là nghiệm của phương trình $X^2 - 18X + 72 = 0$ nên $X \in \{12;6\}$.

Với $X = 12$ thì $x(x+1) = 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ nên $x \in \{3;-4\}$.

Với $X = 6$ thì $x(x+1) = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ nên $x \in \{2;-3\}$.

Đáp số. (3;2), (3;–3), (–4;2), (–4;–3) và các hoán vị.

Nhận xét: Mỗi phương trình (1) và (2) nói trên đều không đổi khi ta đổi chỗ x và y cho nhau. Trong trường hợp này, ta thường tìm tích xy, tổng x + y rồi đưa về giải một phương trình bậc hai.

Ví dụ 30. Tìm cặp số (x; y) thoả mãn cả hai phương trình

$$x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \quad (1) \qquad \text{và} \qquad x + y^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (2)$$

Giải. *Cách 1.* Trừ từng vế (1) và (2) được $x^2 - y^2 - x + y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$.

Nếu x = y, thay vào (1) được $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Ta có $x = y = -\frac{1}{2}$.

Nếu x + y = 1, thay vào (1) được $x^2 - x + 1\frac{1}{4} = 0$, vô nghiệm.

Cách 2. Cộng (1) với (2) được

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}.$$

Thử lại, $x = y = -\frac{1}{2}$ nghiệm đúng (1) và (2).

Nhận xét: Trong mỗi phương trình (1) và (2) nói trên, nếu đổi chỗ x và y cho nhau thì phương trình này trở thành phương trình kia. Trong trường hợp này, ta thường trừ vế với vế hai phương trình và nhận được phương trình tích.

Scanned with CamScanner

Ví dụ 31. Tìm các cặp số (x; y) thoả mãn cả hai phương trình

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \text{ (1) và } 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3. \text{ (2)}$$

Giải. *Cách 1.* Nhân (1) với 3 rồi trừ đi (2) được $x^2 - y^2 = 0$. Do đó $y = \pm x$.

Với $y = x$, thay vào (1) được $x^2 = 1$. Ta có (1; 1), (−1; −1).

Với $y = -x$, thay vào (1) được $x^2 = \frac{1}{3}$. Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Có bốn cặp số thoả mãn bài toán.

Cách 2. Ta thấy $x = 0$ không thoả mãn phương trình (1).

Xét $x \neq 0$, đặt $y = kx$. Thay vào (1) và (2) ta được

$x^2(k^2 - k + 1) = 1$ và $x^2(4k^2 - 3k + 2) = 3$.

Khử x^2 ta được $3k^2 - 3k + 3 = 4k^2 - 3k + 2$, suy ra $k = \pm 1$.

Với $k = 1$, ta được $x^2 = 1$. Từ đó ta có (1; 1), (−1; −1).

Với $k = -1$, ta được $x^2 = \frac{1}{3}$. Từ đó ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Nhận xét: Các phương trình (1) và (2) nói trên có dạng

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \text{ và } a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d'.$$

Thường giải chúng theo hai cách:

– *Cách 1.* Dùng phương pháp cộng đại số để biểu thị một ẩn theo ẩn kia, sau đó thế vào một phương trình.

– *Cách 2.* Xét $x = 0$. Xét $x \neq 0$, đặt $y = kx$, thay vào hai phương trình rồi khử x để tìm k.

Ví dụ 32. Tìm các số x, y, z thoả mãn cả hai phương trình

$$x + y + z = 9 \text{ (1) và } x^2 + y^2 + z^2 = 27. \text{ (2)}$$

Giải. *Cách 1.* Biến đổi (1) và (2) thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 81 \text{ và } 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 81.$$

Suy ra $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$.

Do đó $x = y = z = 3$. Thử lại, đúng.

Cách 2. Ta có $6x + 6y + 6z = 54$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z + 27 = 0$ nên $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 0$.

Do đó $x = y = z = 3$. Thử lại, đúng.

Ví dụ 33. Tìm các bộ ba số (x; y; z) thoả mãn cả ba phương trình

$$x + y + z = a, \text{ (1)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ (2)} \qquad x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \text{ (3)}$$

Giải. Từ (1) và (3) ta có $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 0$.

Áp dụng hằng đẳng thức $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$,

ta được $3(x + y)(y + z)(z + x) = 0$.

Xét $x + y = 0$, thay vào (1) được $z = a$.

Scanned with CamScanner

Thay $z = a$ vào (2) được $x^2 + y^2 = 0$, do đó $x = y = 0$. Ta được $(0; 0; a)$.

Tương tự đối với $y + z = 0$, $z + x = 0$ ta được $(a; 0; 0)$ và $(0; a; 0)$. Thử lại, đúng.

Có ba bộ số phải tìm là $(0; 0; a)$, $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$.

Ví dụ 34. Tìm các bộ ba số $(x; y; z)$ thoả mãn cả ba phương trình

$$x + \frac{1}{y} = 2, \ (1) \qquad y + \frac{1}{z} = 2, \ (2) \qquad z + \frac{1}{x} = 2. \quad (3)$$

Giải. Điều kiện x, y, z đều khác 0. Rút y từ (1) được $\frac{1}{y} = 2 - x$ nên $(2 - x)y = 1$. Do $x \neq 2$ (vì $x = 2$ không thoả mãn (1)) nên $y = \frac{1}{2 - x}$. Rút z từ (3) được

$$z = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}.$$

Thay các biểu thức của y và z vào (2) được $\frac{1}{2 - x} + \frac{x}{2x - 1} = 2.$ (4)

Giải (4) được $x = 1$. Do đó $y = 1$, $z = 1$. *Đáp số:* $(1; 1; 1)$.

BÀI TẬP

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO

Giải các phương trình (từ bài 57 đến 74):

57. a) $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$; b) $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$;

c) $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$; d) $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$;

e) $(x - 2)^3 + (x + 1)^3 = 8x^3 - 1$.

58. a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$; b) $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0$;

c) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$; d) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$;

e) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;

59. a) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; b) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$;

c) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$; d) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$;

e) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$; g) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.

60. a) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$; b) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$;

c) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$; d) $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$;

e) $x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 6x + 4 = 0$.

61. a) $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$; b) $x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3)$;

c) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$.

62. a) $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2$; b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

63. a) $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0$; b) $x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2}x - 12 = 0$.

Scanned with CamScanner

64. a) $x(x+1)(x+2)(x+3)=8$;
b) $x(x-1)(x+1)(x+2)=3$;
c) $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8)=144$;
d) $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9)=40$;
e) $(4x+3)^2(x+1)(2x+1)=810$;
g) $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$.

65. a) $4(x^2-x+1)^3=27(x^2-x)^2$;
b) $3(x+5)(x+6)(x+7)=8x$.

66. a) $(x-2)^3+(x-4)^3=8$;
b) $(x+2)^4+(x+4)^4=82$;
c) $(x+2)^4+(x+8)^4=272$;
d) $(x-2)^6+(x-4)^6=64$.

67. a) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$;
b) $x^4+(x-1)(3x^2+2x-2)=0$;
c) $x^4+(x+1)(5x^2-6x-6)=0$;
d) $(x^2+1)^2+(x+2)(3x^2-4x-5)=0$;
e) $x^2(x-1)^2+x(x^2-1)=2(x+1)^2$.

68. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm:
a) $x^4-x^3+2x^2-x+1=0$;
b) $x^4-2x^3+4x^2-3x+2=0$;
c) x^4+2x^2+9.

69. a) $x^5+x^2+2x+2=0$.
b) $(x-3)^5+(5-x)^5=32$.

70. a) $x^4-x^2+2x-1=0$;
b) $x^4-9x^2+24x-16=0$;
c) $x^4=2x^2+8x+3$;
d) $(x^2-16)^2=16x+1$;
e) $(x^2-a^2)^2=4ax+1$;
g) $x^4=4x-3$;
h) $x^4=12x+5$;
i) $x^4=16x+12$;
k) $x^4=2x^2-12x+8$;
l) $x^4+4x^3=8x+12$.

71*. a) $x^4=4x+1$; b) $x^4=8x+7$; c) $x^3-3x^2+9x-9=0$; d) $x^3-x^2-x=\frac{1}{3}$.

72. a) $(x+2)^2+(x+3)^3+(x+4)^4=2$;
b) $\left(x^2-4\right)^2-x=4$;
c) $\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2-2x+3\right)=2x^2$;
d) $x^4+10x+4=5x^3$.

73*. $(x-\sqrt{2})^3+(x+\sqrt{3})^3+(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2x)^3=0$.

74*. a) $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ (a, b là tham số).
b) $(a+b+x)^3-4(a^3+b^3+x^3)-12abx=0$ (a, b là tham số).

75. Giải phương trình $x^3-(m^2-m+7)x-3(m^2-m-2)=0$, biết rằng -1 là một nghiệm của phương trình.

76. Giải phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$, biết rằng a, b, c là những số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình.

77. Giải phương trình $x^3+ax^2+bx+1=0$, biết rằng a, b là những số hữu tỉ và $2+\sqrt{5}$ là một nghiệm của phương trình.

78. Giải phương trình $4x^4-11x^2+9x+m=0$, biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thoả mãn $x_1+x_2=-1$, $x_1>x_2$.

Scanned with CamScanner

79*. a) Chứng minh rằng nếu $x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$ thì $4x^3 + 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$.

b) Áp dụng nhận xét trên để giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$.

c) Giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{4}{3}$.

80. Ta có định lí Viète đối với phương trình bậc ba như sau: Nếu phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có các nghiệm thực x_1, x_2, x_3 thì

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

Tìm các nghiệm của phương trình $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ rồi kiểm nghiệm lại chúng thoả mãn định lí Viète đối với phương trình bậc ba.

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Giải các phương trình (từ bài tập 81 đến 89):

81. a) $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5}$;

b) $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{9}{2(x^2 - 2x + 4)}$;

c) $\frac{6}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{8}{(x - 1)(x + 4)} = 1$; d) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$.

82. a) $x^2 + \frac{x^2}{(x - 1)^2} = 8$ b) $x^2 + \frac{81x^2}{(x + 9)^2} = 40$;

c) $x^2 + \frac{x^2}{(x + 1)^2} = 13$; d) $x^2 + \frac{4x^2}{(x + 2)^2} = 5$;

e) $x^2 + \frac{25x^2}{(x + 5)^2} = 11$; g) $\left(\frac{x^2}{x - 3}\right) = 3x^2 - 24x + 40$.

83. a) $4\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 13\left(x + \frac{1}{x}\right)$; b) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 13\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

84. a) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$; b) $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$;

c) $\frac{3x}{x^2 - 3x + 1} + \frac{7x}{x^2 + x + 1} = -4$.

Scanned with CamScanner

85. a) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-12x+15}$; b) $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5}-\dfrac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5}=-\dfrac{1}{4}$.

86. a) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2=\dfrac{40}{9}$; b) $\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$;

c) $\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^2+\dfrac{x}{x-5}-12\left(\dfrac{x-3}{x-5}\right)^2=0$;

d) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-4)^2}=\dfrac{1}{2}$; e) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{5}{4}$.

87. a) $\dfrac{x(3-x)}{x+1}\left(x+\dfrac{3-x}{x+1}\right)=2$; b) $\dfrac{x(5-x)}{x+1}\left(x+\dfrac{5-x}{x+1}\right)=6$;

c) $x.\dfrac{8-x}{x-1}\left(x-\dfrac{8-x}{x-1}\right)=15$.

88*. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+6}$.

89. $\dfrac{(1995-x)^2+(1995-x)(x-1996)+(x-1996)^2}{(1995-x)^2-(1995-x)(x-1996)+(x-1996)^2}=\dfrac{19}{49}$.

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Giải phương trình (từ bài tập 90 đến 96):

90. a) $x^2-2x-4=-2\sqrt{2x+3}$; b) $x^2-4x=8\sqrt{x-1}$;

c) $x^2+\sqrt{x+4}=4$; d) $x+5x+7=\sqrt{2x+5}$; e) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}=1$.

91. a) $x+3=\sqrt{x^2+7x+11}-2\sqrt{x+2}$; b) $\sqrt{1-\sqrt{1+x}}=x$;

c) $\dfrac{4x}{1+\sqrt{x+1}}+\dfrac{5}{x}=x$.

92. a) $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$; b) $5\sqrt{x^3+1}=2(x^2+2)$.

93. a) $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}=x$; b) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=x$.

94. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{x}{1-x}$.

95. $(x-1)(x+3)+2(x-1)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}=8$.

96. $\sqrt{x-2a+16}-2\sqrt{x-a+4}+\sqrt{x}=0$ (a là tham số).

Scanned with CamScanner

97. $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\sqrt{a}$ (a là tham số).

98. Tìm các số hữu tỉ x, y với $x > y \geq 0$ thoả mãn phương trình

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Tìm các cặp số (x; y) thoả mãn cả hai phương trình (từ Bài tập 99 đến 105)

99. a) $x^2+4y^2+x=4xy+2y+2$ và $4x^2+4xy+y^2=2x+y+56$;

b) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5}$ và $xy=6$; c) $3x+5y=9+2xy$ và $2x+3y=10-xy$;

d) $x^2-4xy+y^2=1$ và $y^2-3xy=4$.

100. a) $x+y=1$ và $x^2+y^2=41$; b) $x-y=1$ và $x^2-xy+y^2=7$;

c) $x-y=3$ và $x^2+xy+y^2=21$; d) $x-y=2$ và $x^3-y^3=26$;

e) $x-y=a$ và $x^3-y^3=19a^3$ với $a>0$.

101. a) $x^2+2y+1=0$ và $y^2+2x+1=0$; b) $x^2-3x=2y$ và $y^2-3y=2x$;

c) $2x=y(1-x^2)$ và $2y=x(1-y^2)$.

102. a) $x^2+(x+y)^2=17$ và $y^2+(x+y)^2=25$;

b) $x^2+2xy-2y^2=1$ và $2x^2-xy+3y^2=4$.

103. a) $2x^2-y^2=1$ và $xy+x^2=2$; b) $x^2+y^2=5$ và $x+y-xy=1$.

104. a) $(x-y)(x^2-y^2)=160$ và $(x+y)(x^2+y)=580$;

b) $x^3+y^3=35(x-y)$ và $x^2-y^2=5$;

c) $x^2-xy+y^2=7$ và $x^3-7(x+y)=8$;

d) $x^2+y^2=10$ và $(x+y)(5+xy)=32$.

105. a) $x+y=4$ và $x^4+y^4=82$; b) $x+y=1$ và $x^3+y^3=7$.

106. Tìm các bộ ba số (x; y; z) thoả mãn cả hai phương trình:

a) $x^2+y^2+z^2=12$ và $xy+yz+zx=12$;

b) $x^2+y^2+z^2=3$ và $x+y+z=3$.

Tìm các bộ số (x; y; z) thoả mãn cả ba phương trình (Bài tập 107, 108)

107. a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{5}$;

b) $x+y+z=8$, $xy+yz+zx=20$, $xyz=16$;

c) $x+xy+y=1$, $y+yz+z=3$, $z+zx+x=7$;

d) $x-\dfrac{1}{y}=1$, $y-\dfrac{1}{z}=1$, $z-\dfrac{1}{x}=1$.

Scanned with CamScanner

108. a) $x^3 + y = x^2 + 1,\ 2y^3 + z = 2y^2 + 1,\ 3z^3 + x = 3z^2 + 1;$

b) $x + y + z = 7,\ x^2 + y^2 + z^2 = 21,\ xy = z^2;$

c) $2x^2 = y(x^2 + 1),\ 2y^2 = z(y^2 + 1),\ 2z^2 = x(z^2 + 1);$

d*) $x^2 + x + yz = 1,\ y^2 + y + zx = 1,\ z^2 + z + xy = 1.$

109. Tìm bốn số dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng ba số còn lại.

~ **Ví dụ:** 42 đến 48, 52.

Bài tập: 137 đến 146, 149, 150, 154.

§5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 35. Một anh đầu bếp mua trứng hết 12 xen, nhưng vì trứng nhỏ nên anh ta đề nghị cửa hàng cho mình 2 quả trứng nữa. Do đó giá mỗi tá (12 quả) trứng giảm đi được 1 xen. Vậy anh đầu bếp đã mua được bao nhiêu quả trứng?

Bài toán của Sam Loyd

Giải. Gọi số trứng anh đầu bếp đã mua được là x (quả), x nguyên dương. Số trứng anh ta lấy lúc đầu là $x - 2$ (quả).

Giá một quả trứng lúc đầu là $\frac{12}{x-2}$ (xen), lúc sau là $\frac{12}{x}$ (xen).

Giá một tá trứng lúc đầu là $\frac{12 \cdot 12}{x-2}$ (xen), lúc sau là $\frac{12 \cdot 12}{x}$ (xen).

Giá một tá trứng lúc sau giảm đi 1 xen so với lúc đầu nên $\frac{144}{x-2} - \frac{144}{x} = 1.$

Thu gọn phương trình trên được $x^2 - 2x - 288 = 0.$

Giải phương trình ta được $x_1 = 18$ (thoả mãn điều kiện), $x_2 = -16$, loại.

Vậy anh đầu bếp đã mua được 18 quả trứng.

Ví dụ 36. Hai bà ra chợ bán tổng cộng 100 quả trứng. Số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng số tiền thu được lại bằng nhau.

Bà thứ nhất nói với bà thứ hai:

- Nếu tôi có số trứng như của bà, tôi sẽ thu được 15 đồng.

Bà thứ hai nói:

- Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của bà, tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng.

Hỏi mỗi bà có bao nhiêu quả trứng mang đi bán?

Bài toán của Euler

Giải. Gọi số trứng của bà I mang đi bán là x (quả), x nguyên dương, $x < 100$, Số trứng của bà II mang đi bán là $100 - x$ (quả).

Scanned with CamScanner

Giá tiền mỗi quả trứng mang đi bán của bà I là $\frac{15}{100-x}$ đồng, của bà II là $6\frac{2}{3} : x$ hay $\frac{20}{3x}$ đồng.

Số tiền hai người thu được bằng nhau nên có phương trình $\frac{15}{100-x}.x = \frac{20}{3x}.(100-x)$.

Thu gọn phương trình trên được $x^2 + 160x - 8\,000 = 0$.

Giải phương trình ta được $x_1 = 40$ (thoả mãn các điều kiện)

$x_2 = -200$, loại.

Vậy bà I có 40 quả trứng, bà II có 60 quả trứng mang đi bán.

Chú ý: Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp số học:

Gọi tỉ số giá trứng của bà I và giá trứng của bà II là k. Họ bán được số tiền bằng nhau nên số trứng của bà II mang đi gấp k lần số trứng của bà I mang đi.

Giả sử trước khi bán, họ đổi trứng cho nhau, tức là bà nọ bán trứng của bà kia nhưng bán với giá trứng của mình. Thế thì số trứng của bà I bán trở thành gấp k lần số trứng của bà II bán, giá trứng cũng gấp k lần giá trứng của bà II bán, nên số tiền 15 đồng gấp k^2 lần số tiền $6\frac{2}{3}$ đồng.

Do đó $k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = 45 : 20 = 9 : 4 \Rightarrow k = 3 : 2$.

Số trứng của bà II mang đi bán gấp $\frac{3}{2}$ lần số trứng của bà I.

Dễ dàng tìm được số trứng của mỗi người mang đi bán.

BÀI TẬP

110. Trong cùng một thời gian như nhau, đội I phải đào 810 m^3 đất, đội II phải đào 900 m^3 đất. Kết quả đội I đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, đội II hoàn thành trước thời hạn 6 ngày. Tính số đất mỗi đội đã đào trong một ngày, biết rằng mỗi ngày đội II đã đào nhiều hơn đội I là $4m^3$.

111. Một người thả hòn đá rơi xuống giếng, sau 1,5 giây thì nghe thấy tiếng đá chạm đáy giếng. Xác định thời gian rơi của đá (làm tròn đến 0,1 giây) và chiều sâu của giếng (làm tròn đến mét), biết rằng quãng đường s (mét) của một vật rời tự do (không có vận tốc ban đầu) sau t giây được tính theo công thức $s = 5t^2$ và vận tốc của âm thanh là 340 m/s.

112. Có hai loại quặng sắt: quặng loại I và quặng loại II, khối lượng tổng cộng là 10 tấn. Khối lượng sắt nguyên chất trong quặng loại I là 0,8 tấn, trong quặng loại II là 0,6 tấn. Biết tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I nhiều hơn tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là 10%. Tính khối lượng của mỗi loại quặng.

113. Nếu đường kính của một hình tròn tăng 3m thì diện tích của nó tăng gấp đôi. Tính độ dài đường kính lúc đầu (làm tròn đến 0,01 m).

Scanned with CamScanner

114. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc ở cùng một chỗ, người thứ nhất đi về phía bắc, người thứ hai đi về phía đông. Sau 2 giờ họ cách nhau 60 km theo đường chim bay. Biết vận tốc của người thứ nhất lớn hơn vận tốc của người thứ hai là 6 km/h. Tính vận tốc của mỗi người.

115. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu chảy một mình cho đầy bể thì vòi I cần nhiều hơn vòi II là 5 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể?

116*. Trên quãng đường AB dài 60 km, người I đi từ A đến B, người II đi từ B đến A. Họ khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C sau khi khởi hành 1 giờ 12 phút. Từ C, người I đi tiếp đến B với vận tốc giảm hơn trước 6 km/h, người II đi tiếp đến A với vận tốc như cũ. Kết quả người I đến nơi sớm hơn người II là 48 phút. Tính vận tốc lúc đầu của mỗi người.

117. Một cửa hàng mua x chiếc áo hết d nghìn đồng. Cửa hàng bán 2 chiếc với giá bằng một nửa giá mua, bán những chiếc còn lại được lãi 8 nghìn đồng mỗi chiếc. Tiền lãi tổng cộng là 72 nghìn đồng.

a) Tính x, biết rằng d = 480.

b*) Tìm giá trị nhỏ nhất của x, biết rằng d là một số tự nhiên.

118*. Bạn Long có đồ chơi là một chiếc thuyền buồm. Khi Long cho thuyền chạy từ A đến B thì thời gian thuyền đi nhiều hơn so với khi có gió thổi thuận chiều là 9 giây. Khi bị gió thổi ngược chiều thì thời gian thuyền đi từ A đến B là 84 giây. Tính thời gian thuyền đi từ A đến B khi không có gió thổi.

119. Ba công nhân cùng làm một công việc thì làm xong sớm hơn 18 giờ so với khi người III làm một mình, sớm hơn 3 giờ so với khi người II làm một mình và bằng nửa thời gian so với khi người I làm một mình công việc ấy. Tính thời gian mỗi công nhân làm một mình xong công việc ấy.

120*. Một số học sinh của lớp 9A (nhiều hơn 1) và ba học sinh của lớp 9B đấu cờ với nhau, mỗi người đấu với mỗi người còn lại một trận (thắng được 1 điểm, hoà được $\frac{1}{2}$ điểm, thua được 0 điểm). Khi tổng kết số điểm của mỗi lớp, các bạn phát hiện thấy tổng số điểm của mỗi lớp có được khi đấu với nhau bằng tổng số điểm có được khi đấu với lớp bạn. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu bạn đấu cờ?

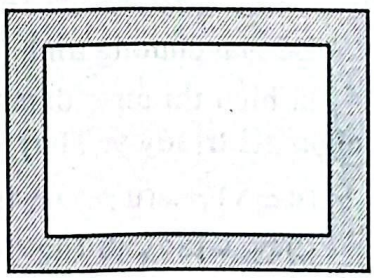
121. (Bài toán của Xem Lôi-đơ (*Sam Loyd*, Mỹ, 1841 - 1911).

Một điền chủ muốn cắt ra từ một mảnh đất hình chữ nhật một dải đất có chiều rộng không đổi dọc theo bốn bờ của mảnh đất (phần gạch sọc trên Hình 5) sao cho diện tích phần cắt ra bằng diện tích phần còn lại.

Trong cuốn sách của mình, Sam Loyd đưa ra cách làm của người điền chủ (nhưng không chứng minh):

Lấy nửa chu vi hình chữ nhật ban đầu trừ đi đường chéo của nó, rồi chia cho 4, đó chính là chiều rộng của dải đất được cắt ra.

Hãy chứng tỏ rằng cách làm trên là đúng.



Hình 5

Scanned with CamScanner

122. (Bài toán của *Tartaglia*, Italia, 1500 – 1557)

Một người làm công không trung thực lấy ra 3 cốc rượu trong một thùng rượu của ông chủ và thay thế bằng nước. Anh ta lặp lại việc này thêm hai lần nữa, lấy ra tổng cộng 9 cốc và thay thế bằng nước. Vì thế lượng rượu trong thùng chỉ còn một nửa. Vậy số rượu trong thùng lúc đầu là bao nhiêu cốc?

123. Tại một viện bảo tàng có một sa bàn hình vuông mô tả một trận đánh mà quân ta cắm cờ chiến thắng ở một điểm cách ba đỉnh liên tiếp của hình vuông là 1 m, 2 m, 3 m. Tính diện tích của sa bàn.

Bài đọc thêm. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO

Bốn nghìn năm trước đây, người Hy Lạp đã biết cách giải các phương trình bậc nhất và bậc hai. Trải qua nhiều thế kỉ, các nhà toán học tìm cách giải tổng quát các phương trình bậc ba, nhưng không kết quả.

Mãi đến năm 1526, nhà toán học Italia Phe-rô (*Ferro*) mới tìm được cách giải phương trình bậc ba dạng $x^3 + ax = b$ với $a, b > 0$, nhưng ông không công bố phát minh của mình. Nắm được cách giải này, tháng 2 năm 1535, các học trò của Ferro thách nhà toán học có tiếng lúc đó là Tac-ta-li-a (*Tartaglia*) giải phương trình bậc ba và họ tin rằng mình nắm chắc phần thắng. Một tuần trước ngày thi tài, Tartaglia đã tìm được cách giải tổng quát phương trình $x^3 + ax + b = 0$ với mọi giá trị của a và b. Ông đã giải được tất cả 30 bài toán của đối phương trong ngày đọ sức, trong khi đối phương không giải được bài nào trong 30 bài toán mà ông đưa ra.

Theo lời khẩn khoản của Cac-đa-nô (*Cardano*), Tartaglia đã truyền lại cách giải ấy, nhưng yêu cầu giữ bí mật. Năm 1545, Cardano công bố công thức tìm nghiệm của phương trình bậc ba trong một cuốn sách của mình.

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Trước hết, phương trình bậc ba nào cũng dễ dàng biến đổi về dạng

$$y^3 + my^2 + ny + c = 0. \qquad (1)$$

Bằng cách đặt $y = x - \frac{m}{3}$, phương trình sẽ có dạng $x^3 + ax + b = 0$.

Để giải phương trình $x^3 + ax + b = 0$ (2)

ta biểu thị ẩn x thành tổng của hai ẩn u và v, tức là $x = u + v$. Như thế, v có thể chọn giá trị tuỳ ý. Thay vào (2), ta có

$(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0 \Leftrightarrow (u^3 + v^3 + b) + (u + v)(3uv + a) = 0.$

Chọn v sao cho $3uv + a = 0$, bài toán sẽ quy về giải hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = -\frac{a}{3} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ u^3v^3 = -\frac{a^3}{27}. \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Như vậy, u^3 và v^3 là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 + bt - \frac{a^3}{27} = 0$. (3)

Giải phương trình (3), nếu (3) có nghiệm thì ta được $u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D}$, $v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{D}$. (4)

trong đó $D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Do đó công thức nghiệm của phương trình (2) là $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}}$. (5)

Ta công nhận có số i mà $i^2 = -1$, khi đó $\sqrt{D}$ luôn tồn tại, chẳng hạn với $D = -4$ thì $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$. Do đó với $D = -4$ và $b = 6$ thì nghiệm của phương trình (2) là $x = \sqrt[3]{-3 + 2i} + \sqrt[3]{-3 - 2i}$. Các số $-3 + 2i$ và $-3 - 2i$ là các số phức.

Vì căn bậc ba của một số phức có ba giá trị, nên công thức (5) cho ba giá trị của u cũng như v, các giá trị đó được lựa chọn để thoả mãn điều kiện $uv = -\frac{a}{3}$. Người ta tìm được ba nghiệm của phương trình (2) là:

$$x_1 = u_1 + v_1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

với u_1 là một giá trị của u và v_1 là giá trị tương ứng của v thoả mãn (4) và điều kiện $uv = -\frac{a}{3}$.

Nếu $D > 0$, trong các nghiệm của phương trình (2) có một nghiệm thực. Nếu $D = 0$, trong các nghiệm của phương trình (2) có hai nghiệm thực, trong đó có một nghiệm kép. Nếu $D < 0$, phải tính căn bậc hai của một số âm, được một số phức. Do đó để tìm u_1, phải biết khai căn bậc ba của một số phức. Đó là một công việc khá phức tạp. Điều lí thú trong trường hợp $D < 0$ là phương trình có ba nghiệm thực. Thành ra việc sử dụng công cụ số phức lại giúp tìm được nghiệm thực của phương trình.

Sau đây là một số ví dụ tìm nghiệm thực của phương trình bậc ba.

Ví dụ 1. Giải phương trình $y^3 + 3y^2 + 12y - 16 = 0$.

Giải. Đặt $y = x - 1$, ta có $(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 12(x-1) - 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 9x - 26 = 0$.

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(-\frac{26}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{3}\right)^3 = 13^2 + 3^3 = 196 > 0;$$

$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D} = 13 + 14 = 27$ nên $u_1 = 3$, suy ra $v_1 = -1$.

Scanned with CamScanner

Phương trình $x^3 + 9x - 26 = 0$ có một nghiệm thực $x = 3 - 1 = 2$. Do đó phương trình đã cho có một nghiệm thực $y = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Giải. $D = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3 = 1 - 1 = 0$; $u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D} = 1$, nên $u_1 = 1$, suy ra $v_1 = 1$.

Phương trình có hai nghiệm thực $x_1 = 1 + 1 = 2$ và $x_2 = x_3 = -1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Giải. $D = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 4 - 8 = -4 < 0$;

$$\sqrt{D} = 2i;\ v^3 = -2 - 2i = -\sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{8}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ).$$

Người ta chứng minh được rằng một trong các căn bậc ba của số phức $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ là $\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right)$. Do đó một giá trị của v là $v_1 = -\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$.

Ta tính được $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (xem Bài tập 21 trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9*, tập một) nên

$$v_1 = -\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ) = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Do đó $u_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Phương trình có ba nghiệm thực:

$$x_1 = u_1 + v_1 = -(\sqrt{3} + 1);$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = 2;$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = \sqrt{3} - 1.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

Năm 1545, nhà toán học Italia Phe-ra-ri (*Ferrari*), học trò của Cardano, đã tìm ra cách giải tổng quát phương trình bậc bốn. Cách giải này được trình bày trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$. (1)

Giải. Chuyển ba hạng tử cuối sang vế phải rồi cộng $16x^2$ vào hai vế, ta được

$$(x^2 + 4x)^2 = x^2 + 4x + 2.$$

Scanned with CamScanner

Đưa vào một ẩn mới là y, cộng hai vế của phương trình trên với $(x^2+4x)y+\frac{y^2}{4}$,

phương trình trở thành $\left(x^2+4x+\frac{y}{2}\right)^2=(1+y)x^2+(4+4y)x+\left(\frac{y^2}{4}+2\right)$. (2)

Lựa chọn y sao cho vế phải là một bình phương. Muốn vậy, biệt số Δ của tam thức bậc hai đối với x (ở vế phải) phải bằng 0, tức là $(4+4y)^2-4(1+y)\left(\frac{y^2}{4}+2\right)=0$

hay $(1+y)[16(1+y)-(y^2+8)]=0$.

Ta có ngay một giá trị $y=-1$.

Thay giá trị này vào phương trình (2), được $\left(x^2+4x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. (3)

Phương trình (3) tương đương với hai phương trình $x^2+4x+1=0$ và $x^2+4x-2=0$.

Giải các phương trình bậc hai đó, được bốn nghiệm của phương trình (1) là:

$$x=-2\pm\sqrt{3};\quad x=-2\pm\sqrt{6}.$$

III. MỘT SỐ CÁCH GIẢI KHÁC

Giải phương trình bậc ba và bậc bốn bằng công thức tổng quát khá phức tạp. Tuy vậy, nhiều phương trình bậc ba và bậc bốn giải được dễ dàng bằng phương pháp hạ bậc sau khi phân tích vế trái của phương trình thành nhân tử hoặc đưa vào các ẩn mới.

Chẳng hạn, các phương trình nêu trong các ví dụ 1, 2, 3, 4 có thể biến đổi thành

$$(y-1)(y^2+4y+16)=0,$$
$$(x-2)(x+1)^2=0,$$
$$(x-2)(x^2+2x-2)=0,$$
$$(x^2+4x+1)(x^2+4x-2)=0.$$

Khi đó, việc giải phương trình bậc ba và bậc bốn được đưa về giải các phương trình bậc nhất và bậc hai.

IV. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO HƠN BỐN

Trong các thế kỉ XVII, XVIII, các nhà toán học đã mất bao công sức để tìm cách giải tổng quát các phương trình bậc năm, bậc sáu. Đến đầu thế kỉ XIX, vấn đề mới được giải quyết bởi hai nhà toán học thiên tài Abel người Na Uy *(Niels Henrik Abel*, 1802 - 1829) và *Galois* người Pháp (*Évariste Galois*, 1811 - 1832).

Cuộc đời của hai nhà toán học giống nhau một cách kì lạ. Cả hai cùng mất cha năm 18 tuổi, cùng phải chật vật kiếm sống để đảm đương gánh nặng gia đình. Cả hai đều bị xã hội bất công vùi dập, đều gặp nhiều bất hạnh, đắng cay. Abel chết năm 27 tuổi, còn Galois chết năm 21 tuổi, sau Abel 3 năm. Một công trình lớn của Abel về hàm siêu việt, sau này được đánh giá là để lại công việc cho các nhà toán học nghiên cứu 500 năm sau, được gửi đến Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, đã bị Cauchy làm thất lạc, mãi sau mới tìm

Scanned with CamScanner

thấy khi Abel đã qua đời. Galois cũng gửi các công trình của mình đến Viện hàn lâm Khoa học Pháp, nhưng đều gặp rủi ro, lần thì Cauchy đánh mất, lần thì Fourier nhận rồi chết đột ngột, lần thì các viện sĩ không hiểu nổi.

Abel

Galois

Là người tích cực chống chế độ phong kiến, Galois hai lần bị cầm tù vì hoạt động chính trị, cuối cùng bị chết trong một cuộc đấu súng do bọn mật thám bố trí. Biết mình khó thoát, hôm trước cuộc đấu, Galois viết vội 62 trang bản thảo về điều kiện giải được các phương trình bằng căn thức trong 13 giờ. Galois đã đưa ra khái niệm *mở rộng phân rã* của đa thức và *nhóm* của mở rộng này (mà ta gọi là nhóm Galois), sự giải được của một phương trình bằng căn thức tương đương với một điều kiện mà nhóm Galois phải có. Ý tưởng độc đáo và sự phức tạp của vấn đề làm cho các nhà toán học đương thời không hiểu nổi. Mười bốn năm sau, công trình của Galois mới được công bố trong một cuốn sách của Liouville, nhưng không ai chú ý tới. Mãi đến năm 1870, sau nhiều năm nghiên cứu, Jordan mới hiểu được công trình của Galois và cho xuất bản một cuốn sách giải thích 62 trang bản thảo cô đọng và súc tích này.

Cống hiến của Abel là đã chứng minh các phương trình bậc cao hơn bốn dưới dạng tổng quát không giải được bằng căn thức, nghĩa là không thể biểu thị được nghiệm của các phương trình đó bằng các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, luỹ thừa, khai căn. Còn Galois đã chỉ ra được dấu hiệu nhận biết một phương trình bậc cao hơn bốn có thể giải được bằng căn thức hay không bằng một lí thuyết độc đáo sau này mang tên ông: lí thuyết nhóm. Hai ông đã giải quyết được một vấn đề toán học bế tắc hàng mấy thế kỉ và đưa môn Đại số phát triển những bước mới.

Scanned with CamScanner

CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1. QUAN HỆ GIỮA PARABOL $y = ax^2$ VÀ ĐƯỜNG THẲNG $y = mx + n$

Hoành độ giao điểm của parabol $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và đường thẳng $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ là nghiệm của phương trình $ax^2 = mx + n$. (1)

– Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì đường thẳng không giao với parabol.

– Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt.

– Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì đường thẳng cắt parabol tại hai điểm trùng nhau, khi đó ta nói đường thẳng tiếp xúc với parabol.

Ví dụ 37(2). Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$.

a) Xác định toạ độ các giao điểm A, B của parabol và đường thẳng đã cho.

b) Xác định toạ độ điểm C thuộc cung AB của parabol đó sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

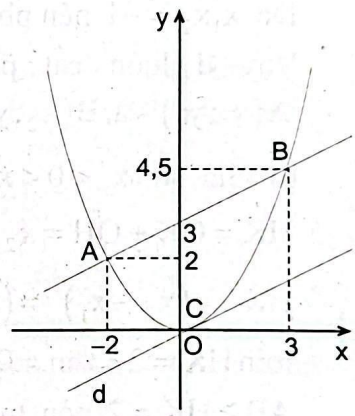
Giải. (h.6)

a) Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$ là

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0.$ (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 3$.

Với $x = -2$ thì $y = 2$, với $x = 3$ thì $y = 4\frac{1}{2}$.



Hình 6

Giao điểm của parabol với đường thẳng là A(–2; 2) và $B\left(3\,;\ 4\frac{1}{2}\right)$.

b) Ta cần tìm điểm C thuộc cung AB và cách xa AB nhất. Ta xác định đường thẳng d song song với AB và tiếp xúc với parabol, tiếp điểm là điểm C cần tìm.

Đường thẳng d song song với AB có dạng $y = \frac{1}{2}x + n$.

Điều kiện để d tiếp xúc với parabol là phương trình $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + n$ hay

$x^2 - x - 2n = 0$ (2) có nghiệm kép.

Scanned with CamScanner

Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$.

Với $n = -\frac{1}{8}$ thì nghiệm kép của (2) là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Toạ độ tiếp điểm C của đường thẳng d với parabol là $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

Mọi điểm C' khác C thuộc cung AB của parabol đều có khoảng cách đến AB nhỏ hơn khoảng cách từ C đến AB.

Vậy ΔABC có diện tích lớn nhất khi điểm C có toạ độ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

Ví dụ 38(3). Cho parabol $y = x^2$ và đường thẳng d cắt trục tung tại điểm C(0;1).

a) Chứng minh rằng đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B.

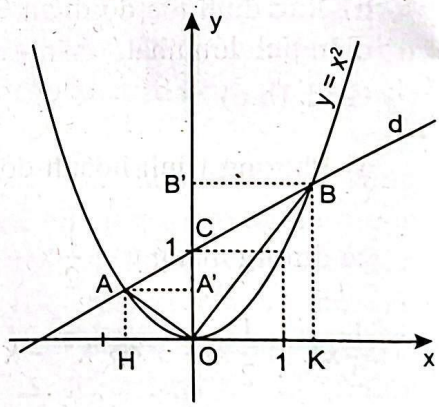
b) Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Tìm giá trị nhỏ nhất của HK, AB và diện tích tam giác OAB.

c) Chứng minh rằng tam giác CHK là tam giác vuông.

Giải. (h.7) a) Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = mx + 1$ là $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$.

Do $x_1x_2 = -1$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Vậy d luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.



Hình 7

b) Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì $OH = |x_1| = -x_1$, $OK = x_2$,

$HK = OK + OH = x_2 - x_1$.

$HK^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 4 \geq 4$.

$\min HK = 2 \Leftrightarrow m = 0 \Leftrightarrow$ đường thẳng d là $y = 1$.

$AB \geq HK = 2$ nên $\min AB = 2 \Leftrightarrow$ đường thẳng d là $y = 1$.

$$S_{OAB} = S_{OCA} + S_{OCB} = \frac{1}{2}OC\left(AA' + BB'\right) = \frac{1}{2}OC \cdot HK \geq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$\min S_{OAB} = 1 \Leftrightarrow$ đường thẳng d là $y = 1$.

c) *Cách 1*

$$CH^2 + CK^2 = \left(OC^2 + OH^2\right) + \left(OC^2 + OK^2\right) = 1 + x_1^2 + 1 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2.$$

$$HK^2 = (x_2 - x_1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2.$$

Suy ra $CH^2 + CK^2 = HK^2$ nên ΔCHK vuông tại C.

Scanned with CamScanner

Cách 2. Ta có $\tan\widehat{OCH} = \dfrac{OH}{OC} = -x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ (vì $x_1x_2 = -1$); $\tan\widehat{OKO} = \dfrac{OC}{OK} = \dfrac{1}{x_2}$.

Suy ra $\widehat{OCH} = \widehat{OKC}$ nên $\widehat{OCH} + \widehat{OCK} = 90^\circ$, tức là $\widehat{HCK} = 90^\circ$.

Vậy ΔCHK vuông tại C.

Cách 3. Đường thẳng HC đi qua $(x_1;\ 0)$ và (0; 1) nên có độ dốc $a = \dfrac{1-0}{0-x_1} = \dfrac{1}{-x_1}$.

Đường thẳng CK đi qua điểm (0;1) và $(x_2;0)$ nên có độ dốc là $a' = \dfrac{0-1}{x_2-0} = \dfrac{1}{x_2}$.

Ta có $aa' = \dfrac{1}{x_1x_2} = -1$ nên $HC \perp CK$.

BÀI TẬP

124(2). Cho parabol $y = x^2$. Tìm điểm A thuộc parabol sao cho tiếp tuyến với parabol tại A song song với đường thẳng $y = 4x + 5$.

125(2). a) Cho parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = mx + n$ (d). Xác định các hệ số m và n để đường thẳng d đi qua điểm A (1; 0) và tiếp xúc với parabol. Tìm toạ độ của tiếp điểm.

b) Cũng hỏi như câu a nếu toạ độ của A là (–1; – 4).

126(2). Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc parabol với hoành độ tương ứng là –1 và 2. Tìm điểm M trên cung AB của parabol sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

127(3). Cũng hỏi như Ví dụ 38 với parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$ và điểm C(0; 2)

128(3). Cho parabol $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = mx + 2$. Tìm giá trị của m để đường thẳng cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt sao cho diện tích tam giác OAB bằng:

a) 4; b) $2\sqrt{5}$.

129(3). Cho parabol $y = x^2$.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\dfrac{1}{4}$, các tiếp tuyến kẻ từ M với parabol vuông góc với nhau.

b*) Tìm các điểm M trên mặt phẳng toạ độ sao cho các tiếp tuyến kẻ từ M đến parabol vuông góc với nhau.

130*(3). Cho parabol $y = x^2$. Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng $y = mx + 2$ với parabol (m là tham số). Tìm giá trị của m để đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất. Cho biết công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

Scanned with CamScanner

Chuyên đề 2. ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

I. DẤU CỦA CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Theo hệ thức Viète, nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Do đó điều kiện để một phương trình bậc hai:

- Có hai nghiệm dương là $\Delta \geq 0, P > 0, S > 0$;
- Có hai nghiệm âm là $\Delta \geq 0, P > 0, S < 0$;
- Có hai nghiệm trái dấu là $P < 0$ (khi đó hiển nhiên $\Delta > 0$).

II. SO SÁNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI MỘT SỐ

1. So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với số 0

Trong nhiều trường hợp, ta cần so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số cho trước, trong đó có nhiều bài toán đòi hỏi tìm điều kiện để phương trình bậc hai $(a \neq 0)$ có ít nhất một nghiệm không âm.

Ví dụ 39(3). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ít nhất một nghiệm không âm:

$$x^2 + mx + (2m - 4) = 0. \qquad (1)$$

Giải. *Cách 1.* $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$, $P = 2m - 4$, $S = -m$.

Phương trình (1) có nghiệm với mọi m. Trước hết ta tìm điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) đều âm. Điều kiện đó là

$$\begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4 > 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy điều kiện để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm không âm là $m \leq 2$.

Cách 2. $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$, $P = 2m - 4$, $S = -m$.

Nếu $P \leq 0$, tức là $m \leq 2$, thì phương trình (1) tồn tại nghiệm không âm.

Nếu $P > 0$ (đã có $\Delta \geq 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu. Để thoả mãn đề bài, phải có $S > 0$. Giải điều kiện $P > 0$, $S > 0$ được $m > 2$ và $-m > 0$, không xảy ra.

Kết luận: $m \leq 2$.

Cách 3. Giải phương trình (1): $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$.

Ta có $x_1 = \frac{-m - (m - 4)}{2} = 2 - m$, $x_2 = \frac{-m + (m - 4)}{2} = -2$.

Phải có $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Scanned with CamScanner

2. So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số bất kì

Ví dụ 40 (3). Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 + mx - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2.

Giải

Cách 1. Đặt $y = x - 2$. Thay $x = y + 2$ vào $x^2 + mx - 1 = 0$ (1) và rút gọn ta được

$$y^2 + (m+4)y + (2m+3) = 0. \qquad (2)$$

Ta cần tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm.

$\Delta = (m+4)^2 - 4(2m+3) = m^2 + 4 > 0$, $P = 2m + 3$, $S = -(m+4)$.

Điều kiện để phương trình (2) có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) đều âm là

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ -(m+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}.$$

Vậy với $m \leq -\frac{3}{2}$ thì (2) có ít nhất một nghiệm không âm, tức là (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2.

Cách 2. Giải phương trình (1) được $x_1 = \dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}$.

Ta thấy $x_1 > x_2$ nên chỉ cần tìm m để $x_1 \geq 2$.

Ta có $\dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2} \geq 2$ khi và chỉ khi $\sqrt{m^2+4} \geq m+4$. (3)

Nếu $m \leq -4$ thì (3) có vế trái dương, vế phải âm nên (3) đúng.

Nếu $m > -4$ thì (3) $\Leftrightarrow m^2 + 4 \geq m^2 + 8m + 16 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$. Ta được $-4 < m \leq -\frac{3}{2}$.

Gộp $m \leq -4$ và $-4 < m \leq -\frac{3}{2}$ ta được giá trị phải tìm của m là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 41 (3). Tìm các giá trị của m để phương trình $3x^2 - 4x + 2(m-1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

Giải. *Cách 1.* Đặt $x - 2 = y$. Thay $x = y + 2$ vào $3x^2 - 4x + 2(m-1) = 0$ (1) và rút gọn ta được $3y^2 + 8y + (2m+2) = 0$. (2)

Cần tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt. Ta giải điều kiện

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 6m > 0 \\ 2m + 2 > 0 \\ -\dfrac{8}{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{3}.$$

Scanned with CamScanner

Cách 2. Xét phương trình (1). Giải điều kiện

$$\begin{cases}\Delta' > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0 & (3) \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 & (4) \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 & (5)\end{cases}$$

Giải (3) được $m < \frac{5}{3}$.

Giải (4): $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{3} - 2.\frac{4}{3} + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Giải (5): $x_1 + x_2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - 4 < 0$, luôn đúng. Vậy ta được $-1 < m < \frac{5}{3}$.

Cách khác. Xem Bài tập 151.

III. ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM CỦA MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 42 (4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^4 + mx^2 + (2m - 4) = 0. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $x^2 = y \geq 0$. Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là phương trình $y^2 + my + (2m - 4) = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm.

Theo kết quả ở Ví dụ 39, các giá trị của m phải tìm là $m \leq 2$.

Ví dụ 43 (4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 + (m - 4)x + 3} = x - 2. \qquad (1)$$

Giải

Với $x \geq 2$ thì $(1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m - 4)x + 3 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$. (2)

Điều kiện để (1) có nghiệm là (2) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2.

Theo kết quả ở Ví dụ 40, các giá trị của m phải tìm là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 44 (4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$x^3 - m(x + 1) + 1 = 0. \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x^2 - x + 1 - m = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt nếu:

a) Phương trình (2) có nghiệm kép, nghiệm đó phải khác –1.

$\Delta = 4m - 3$. Giải $\Delta = 0$ được $m = \frac{3}{4}$. Khi đó $x = \frac{1}{2} \neq -1$.

Scanned with CamScanner

b) Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm là –1:

$$\begin{cases}\Delta > 0 \\ (-1)^2 - (-1) + 1 - m = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m > \dfrac{3}{4} \\ m = 3\end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Khi đó $x_1 = -1$, $x_2 = m - 1 = 2$.

Kết luận: Với $m = \dfrac{3}{4}$ thì (1) có hai nghiệm là -1 và $\dfrac{1}{2}$. Với $m = 3$ thì (1) có hai nghiệm là -1 và 2.

Ví dụ 45(4). Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình

$$x - \sqrt{1 - x^2} = m \quad (1)$$ chỉ có một phần tử.

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow x - m = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geq m \\ (x - m)^2 = 1 - x^2\end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \geq m \\ 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0.\end{cases} \quad (2)$$

Do đó tập nghiệm của (1) chỉ có một phần tử khi và chỉ khi có một và chỉ một nghiệm của (2) thoả mãn $x \geq m$.

Đặt $x - m = y$, khi đó (2) trở thành $2y^2 + 2my + m^2 - 1 = 0$. (3)

Cần tìm m để chỉ có một nghiệm của (3) thoả mãn $y \geq 0$. Có ba trường hợp:

a) Phương trình (3) có nghiệm kép không âm:

$$\begin{cases}\Delta' = 0 \\ S \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2 + 2 = 0 \\ -m \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}.$$

b) Phương trình (3) có hai nghiệm trái dấu: $P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m^2 - 1}{2} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

c) Phương trình (3) có một nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại âm:

$$\begin{cases}P = 0 \\ S < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m = -1 \\ m = 1\end{array}\right. \\ -m < 0\end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Kết luận: $m = -\sqrt{2}$ hoặc $-1 < m \leq 1$.

Ví dụ 46 (4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = m. \quad (1)$$

(*) Chú ý rằng $f(x) = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) \geq 0 \\ |f(x)|^2 = g(x).\end{cases}$

Scanned with CamScanner

Giải

(1) $\Leftrightarrow (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 8) = m$.

Đặt $x^2 + 2x + 1 = y \geq 0$, khi đó (1) trở thành

$$(y - 1)(y - 9) = m \Leftrightarrow y^2 - 10y + (9 - m) = 0. \qquad (2)$$

Với cách đặt ẩn phụ như trên, ứng với mỗi giá trị dương của y có hai giá trị của x.

Do đó: (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt. Do đó ở (2) ta phải có

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - (9 - m) > 0 \\ 9 - m > 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Kết luận: $-16 < m < 9$.

Ví dụ 47(4). Cho phương trình $x^4 - 2(m + 1)x^2 + (2m + 1) = 0$. (1)

Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ thoả mãn điều kiện $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

Giải

Đặt $y = x^2 \geq 0$, ta có phương trình $y^2 - 2(m + 1)y + (2m + 1) = 0$. (2)

Giả sử phương trình (2) có hai nghiệm dương a và b với $0 < a < b$. Ta có

$x_1 = -\sqrt{b}$, $x_2 = -\sqrt{a}$, $x_3 = \sqrt{a}$, $x_4 = \sqrt{b}$.

Từ $x_4 - x_3 = x_3 - x_2$ suy ra $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{a} - (-\sqrt{a})$ nên $\sqrt{b} = 3\sqrt{a}$. Do đó $b = 9a$.

Cách 1. Từ $b = 9a$ và từ hệ thức Viète đối với phương trình (2), ta có

$$\begin{cases} b = 9a \\ a + b = 2m + 2 \\ ab = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a = 2m + 2 \\ 9a^2 = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow 9a^2 - 10a + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

Với $a = 1$ thì $b = 9$, $m = 4$. Với $a = \frac{1}{9}$ thì $b = 1$, $m = -\frac{4}{9}$.

Cách 2. Ta thấy phương trình (2) có một nghiệm là 1, nghiệm kia bằng $2m + 1$.

Do $b = 9a$ nên có hai trường hợp:

- Nếu $a = 1$ thì $b = 9$. Từ $2m + 1 = 9$ ta được $m = 4$.
- Nếu $b = 1$ thì $a = \frac{1}{9}$. Từ $2m + 1 = \frac{1}{9}$ ta được $m = -\frac{4}{9}$.

Ví dụ 48 (4). Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình sau chỉ có một phần tử:

$$\sqrt{x - 5} + \sqrt{9 - x} = m. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần. Giả sử a là nghiệm của (1) thì $\sqrt{a - 5} + \sqrt{9 - a} = m$. (2)

hay $$\sqrt{(14 - a) - 5} + \sqrt{9 - (14 - a)} = m, \qquad (3)$$

Scanned with CamScanner

chứng tỏ 14 – a cũng là nghiệm của (1)(*).

Để tập nghiệm của (1) chỉ có một phần tử, phải có a = 14 – a ⇔ a = 7.

Khi đó m = $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Điều kiện đủ. Giải phương trình $\sqrt{x-5}+\sqrt{9-x}=2\sqrt{2}$. (4)

Cách 1. Điều kiện: $5 \le x \le 9$. Bình phương hai vế của (4) rồi rút gọn được

$\sqrt{-x^2+14x-45}=2 \Leftrightarrow (x-7)^2=0 \Leftrightarrow x=7$, thoả mãn $5 \le x \le 9$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{x-5}=y$, $\sqrt{9-x}=z$. Từ hai phương trình $y+z=2\sqrt{2}$, $y^2+z^2=4$ với $y \ge 0$, $z \ge 0$, ta được $y=z=\sqrt{2}$. Suy ra x = 7.

Chú ý: Cách khác giải Ví dụ 48:

Điều kiện: $5 \le x \le 9$, $m \ge 0$. Bình phương hai vế của (1) được

$$4+2\sqrt{-x^2+14x-45}=m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x^2+14x-45}=m^2-4. \quad (5)$$

Với điều kiện $m^2 \ge 4$ thì (5) trở thành $4(-x^2+14x-45)=m^4-8m^2+16$

$\Leftrightarrow 4x^2-56x+(m^4-8m^2+196)=0$. (6)

Giải điều kiện $\Delta'=0$ để tập nghiệm của (6) chỉ có một phần tử, ta được $m^2(m^2-8)=0$.

Do $m^2 \ge 4$ nên chỉ có $m^2=8$.

Do $m \ge 0$ nên $m=2\sqrt{2}$. Khi đó tập nghiệm của (6) là {7}, đó cũng là tập nghiệm của (1).

BÀI TẬP

131(3). Tìm các giá trị của m để tồn tại nghiệm không âm của phương trình

$$x^2-2x+(m-2)=0.$$

132 (3). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^2+2m|x-2|-4x+m^2+3=0.$$

133(3). Tìm các giá trị của m để phương trình

$(m-1)x^2-(m-5)x+(m-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn – 1.

134(3). Với giá trị nào của m thì hai nghiệm của phương trình $x^2+x+m=0$ đều lớn hơn m?

135(3). Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2+mx-1=0$ có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng – 2.

136(3). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng một nghiệm dương:

$$x^2-2(m-1)x+(m^2-1)=0.$$

(*) Ta đã có $x_1 = a$. Ta tìm được $x_2 = 14 - a$ như sau: Tìm x_2 sao cho $x_2 - 5 = 9 - a$ và $9 - x_2 = a - 5$, được $x_2 = 14 - a$.

Scanned with CamScanner

137(4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + m - 3)x - m^2 + 3 = 0.$$

138(4). Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $(m-3)x^4 - 2mx^2 + 6m = 0$; b) $x^4 - 2mx^2 + (m+2) = 0$.

139(4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$\left(x^2 - 2x + 1\right)\left(x^2 - 2x\right) - m\left(x^2 - 2x\right) + 2 = 0.$$

140*(4). Cho phương trình $x^4 - 2(m-1)x^2 - (m-3) = 0$. (1)

Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình (1) có:

a) Bốn phần tử; b) Ba phần tử; c) Hai phần tử; d) Không có phần tử nào.

141(4). Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ thoả mãn điều kiện $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$:

a) $mx^4 - 10mx^2 + (m+8) = 0$; b) $x^4 - (m+7)x^2 + 3m = 0$.

142(4). Tìm các giá trị của m sao cho phương trình $x^4 - 40x^2 + 6m = 0$ có bốn nghiệm, và khi biểu diễn bốn nghiệm đó (từ nhỏ đến lớn) trên trục số bởi các điểm A, B, C, D thì AB = BC = CD.

143(4). Chứng minh rằng phương trình sau có hai nghiệm với mọi giá trị của m:

$$(x+1)^4 - (m-1)(x+1)^2 - (m^2 - m + 1) = 0.$$

144*(4). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0.$$

145(4). Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $2x - 4 = 3\sqrt{x - m}$. b) $x + \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4} = m$;

c) $\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m - 10} = x - 3$.

146(4). Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình sau chỉ có một phần tử:

a) $\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2} = m$; b) $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 2} = m$.

c) $\sqrt{13 - x} + \sqrt{5 + x} - \sqrt{(13 - x)(5 + x)} = m$.

Scanned with CamScanner

Chuyên đề 3. ĐA THỨC BẬC HAI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TOÁN CỰC TRỊ

I. DẤU CỦA ĐA THỨC BẬC HAI

Ví dụ 49(2). Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $P(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x.

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $P(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x khác $-\frac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì:

$P(x)$ trái dấu với a với mọi giá trị của x nằm trong khoảng hai nghiệm;

$P(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Giải

$$\frac{P(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $\frac{P(x)}{a} > 0$, do đó $P(x)$ luôn cùng dấu với a với mọi x.

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $\frac{P(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$, do đó $P(x)$ luôn cùng dấu với a với mọi x khác $-\frac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì $\frac{P(x)}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$, do đó (giả sử $x_1 < x_2$):

$P(x)$ trái dấu với a nếu $x_1 < x < x_2$, $P(x)$ cùng dấu với a nếu $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Lưu ý. Nội dung của ví dụ trên là định lí về dấu của tam thức bậc hai. Với định lí này, ta giải các bất phương trình bậc hai như sau:

a) Tam thức $x^2 - 2x - 8$ có hai nghiệm -2 và 4 nên $x^2 - 2x - 8 < 0$ (trái dấu với hệ số của x^2) $\Leftrightarrow -2 < x < 4$.

b) Tam thức $x^2 - 2x - 1$ có hai nghiệm $1 - \sqrt{2}$ và $1 + \sqrt{2}$ nên $x^2 - 2x - 1 > 0$ (cùng dấu với hệ số của x^2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Nhớ câu "*trong trái – ngoài cùng*" khi vận dụng định lí này.

Ví dụ 50(2). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$mx^2 + (m - 2)x + 3 = 0. \qquad (1)$$

Giải. Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Scanned with CamScanner

Khi $m \neq 0$, (1) là phương trình bậc hai, $\Delta = (m-2)^2 - 12m = m^2 - 16m + 4$.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m + 4 \geq 0.$$

Nghiệm của đa thức $m^2 - 16m + 4$ là $8 \pm 2\sqrt{15}$. Do đó $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 8 - 2\sqrt{15} \\ m \geq 8 + 2\sqrt{15} \end{array}\right.$.

Giá trị $m = 0$ cũng thoả mãn $\Delta > 0$. Do đó các giá trị của m để (1) có nghiệm là

$$m \leq 8 - 2\sqrt{15} \text{ hoặc } m \geq 8 + 2\sqrt{15}.$$

II. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta có thể vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai ($\Delta \geq 0$) để chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 51(2). Cho đẳng thức $x^2 - x + y^2 - y = xy$. (1)

a) Chứng minh rằng $(y-1)^2 \leq \frac{4}{3}$, $(x-1)^2 \leq \frac{4}{3}$.

b) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn đẳng thức (1).

Giải. a) Viết (1) dưới dạng một phương trình bậc hai với x là ẩn, y là tham số, ta được

$$x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0. \quad (2)$$

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1.$$

Để phương trình (2) với ẩn x có nghiệm, ta phải có $\Delta \geq 0$, tức là

$$3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y + 3 \leq 4 \Leftrightarrow 3(y-1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (y-1)^2 \leq \frac{4}{3}.$$

Vai trò của x và y trong (1) bình đẳng. Do đó ta cũng có $(x-1)^2 \leq \frac{4}{3}$.

b) $(y-1)^2 \leq \frac{4}{3}$, mà y là số nguyên nên $y - 1 \in \{-1; 0; 1\}$, tương ứng $y \in \{0; 1; 2\}$.

Thay $y = 0$ vào (1) được $x^2 - x = 0$ nên $x \in \{0; 1\}$.

Thay $y = 1$ vào (1) được $x^2 - 2x = 0$ nên $x \in \{0; 2\}$.

Thay $y = 2$ vào (1) được $x^2 - 3x + 2 = 0$ nên $x \in \{1; 2\}$. Thử lại, ta có sáu cặp số thoả mãn (1) là (0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2).

III. DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 52* (4). Cho các số x, y, z thoả mãn các phương trình:

$x^2 = y + 1$ (1), $y^2 = z + 1$ (2), $z^2 = x + 1$. (3)

a) Chứng minh rằng x, y, z đều khác 0.

b) Chứng minh rằng x, y, z cùng dấu.

c) Chứng minh rằng $x = y = z$.

d) Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình trên.

Scanned with CamScanner

Giải. Giả sử x là số lớn nhất ($x \ge y, x \ge z$) thì từ đề bài suy ra $z^2 \ge x^2$, $z^2 \ge y^2$.

a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) - Nếu $x < 0$ thì $y < 0, z < 0$, chứng minh xong.

- Nếu $x > 0$ thì $x + 1 > 1$, do (3) nên $z^2 > 1$ do đó $z > 1$ (chú ý rằng $z < -1$ trái với (2)).

Ta lại có $x \ge z$ nên $x > 1$, suy ra $x^2 > 1$, do (1) nên $y + 1 > 1$, vậy $y > 0$.

c) - Nếu $x, y, z > 0$ thì từ $z^2 \ge x^2$ có $z \ge x$, lại có $x \ge z$ (theo giả sử) nên $x = z$, do (2) và (3) nên $z = y$.

- Nếu $x, y, z < 0$ thì từ $z^2 \ge y^2$ có $z \le y$, do (1) và (2) nên $y^2 \le x^2$, suy ra $y \ge x$, lại có $x \ge y$ (theo giả sử) nên $x = y$, do (1) và (3) nên $x = z$.

Vậy $x = y = z$.

d) $x = y = z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

IV. TÌM CỰC TRỊ

Ví dụ 53(2). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$ bằng cách gọi a là giá trị của A và lập phương trình bậc hai có ẩn là x.

Giải. Biểu thức $A = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$ nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình ẩn x sau đây có nghiệm: $a = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow ax^2 + a = 3 - 4x \Leftrightarrow ax^2 + 4x + (a - 3) = 0$. (1)

Trường hợp 1. Nếu $a = 0$ thì (1) là $4x - 3 = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$.

Trường hợp 2. Nếu $a \ne 0$ thì (1) có nghiệm nếu $\Delta' \ge 0$

$\Leftrightarrow 4 - a(a - 3) \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 \le 0 \Leftrightarrow (a + 1)(a - 4) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le a \le 4$.

So sánh hai trường hợp ta được: $\min A = -1 \Leftrightarrow x = 2$; $\max A = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Lưu ý. Phương pháp giải như ở ví dụ trên gọi là *phương pháp miền giá trị của hàm số.* Đoạn [–1;4] là tập giá trị của hàm số $y = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$.

Ví dụ 54(2). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Giải. Biểu thức A nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình ẩn x sau đây có nghiệm:

$$a = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}. \qquad (1)$$

Do $x^2 + x + 1 \ne 0$ nên (1) $\Leftrightarrow ax^2 + ax + a = x^2 - x + 1$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow (a-1)x^2 + (a+1)x + (a-1) = 0.$ (2)

Trường hợp 1. Nếu $a = 1$ thì (2) có nghiệm $x = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 1$ thì để (2) có nghiệm, cần và đủ là $\Delta \geq 0$, tức là

$$(a+1)^2 - 4(a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1+2a-2)(a+1-2a+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)(a-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq 3 \ (a \neq 1).$$

Với $a = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 3$ thì nghiệm của (2) là $x = \frac{-(a+1)}{2(a-1)} = \frac{a+1}{2(1-a)}$.

Với $a = \frac{1}{3}$ thì $x = 1$, với $a = 3$ thì $x = -1$.

Kết luận: Gộp cả hai trường hợp 1 và 2, ta có: $\min A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$; $\max A = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Lưu ý. a) Cách khác tìm giá trị lớn nhất của A:

$$A = \frac{3x^2+3x+3-2x^2-4x-2}{x^2+x+1} = 3 - \frac{2(x+1)^2}{x^2+x+1} \leq 3;\ \max A = 3 \Leftrightarrow x = -1.$$

b) Cách khác tìm giá trị nhỏ nhất của A:

$$A = \frac{3x^2-3x+3}{3x^2+3x+3} = \frac{x^2+x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2(x^2-2x+1)}{3(x^2+x+1)} = \frac{1}{3} + \frac{2(x-1)^2}{3(x^2+x+1)} \geq \frac{1}{3};$$

$\min A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1.$

Ví dụ 55(2). Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$ với $0 < x < 1$.

Giải

$$C = \frac{x}{1+x} + \frac{5-5x+5x}{x} = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)}{x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{x}{1-x}.\frac{5(1-x)}{x}} + 5 = 5 + 2\sqrt{5}.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{x}{1-x} = \frac{5(1-x)}{x} \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 5 = 0$ (1)

Giải phương trình (1), ta được $x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4} > 1$ (loại), $x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Vậy $\min C = 5 + 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Ví dụ 56(3). Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình sau, tìm các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất:

a) $x^2 - (2m-1)x + (m-2) = 0$; b) $x^2 + 2(m-2)x - (2m-7) = 0$.

Scanned with CamScanner

Giải. a) Xét phương trình $x^2-(2m-1)x+(m-2)=0$.

$\Delta=(2m-1)^2-4(m-2)=4(m-1)^2+5>0$.

Phương trình đã cho có nghiệm với mọi m. Theo hệ thức Viète, ta có

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2m-1)^2-2(m-2)=4m^2-6m+5$$

$$=\left(2m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq\frac{11}{4}.$$

$\min(x_1^2+x_2^2)=\frac{11}{4}$ với $m=\frac{3}{4}$.

b) Xét phương trình $x^2+2(m-2)x-(2m-7)=0$.

$\Delta'=(m-2)^2+2m-7=m^2-2m-3=(m-3)(m+1)$; $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\leq -1$ hoặc $m\geq 3$.

Với $m\leq -1$ hoặc $m\geq 3$ thì phương trình có nghiệm. Theo hệ thức Viète, ta có

$$x_1{}^2+x_1{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-2)^2-2(-2m+7)=4m^2-12m+2$$

$$=(2m-3)^2-7.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $(2m-3)^2-7$ với điều kiện $m\leq -1$ hoặc $m\geq 3$.

Với $m\geq 3$ thì $2m-3\geq 2\cdot 3-3=3\Rightarrow(2m-3)^2-7\geq 3^2-7=2$.

Với $m\leq -1$ thì $2m-3\leq 2(-1)-3=-5\Rightarrow(2m-3)^2-7\geq(-5)^2-7=18$.

Do đó $\min\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)=2$ với $m=3$.

Ví dụ 57*(3). Cho biểu thức $A=\frac{x^2+mx+n}{x^2+2x+4}$. Tìm các giá trị của m, n để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$, giá trị lớn nhất bằng 3.

Giải. Gọi a là giá trị tuỳ ý của biểu thức A. Ta có

$$\frac{x^2+mx+n}{x^2+2x+4}=a\Leftrightarrow x^2+mx+n=ax^2+2ax+4a$$

$\Leftrightarrow (a-1)x^2+(2a-m)x+(4a-n)=0$. (1)

Theo điều kiện của bài toán, giá trị $a=1$ không là giá trị nhỏ nhất, không là giá trị lớn nhất của A nên ta chỉ xét $a\neq 1$. Từ (1) ta có

$\Delta=(2a-m)^2-4(a-1)(4a-n)=-12a^2+4(n-m+4)a+(m^2-4n)$.

Điều kiện để (1) có nghiệm (tức là điều kiện để biểu thức A nhận giá trị a) là

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow 12a^2+4(m-n-4)a+(4n-m^2)\leq 0 \qquad (2)$$

Nghiệm của bất phương trình (2) là $a_1\leq a\leq a_2$, trong đó a_1 và a_2 là các nghiệm của phương trình $12a^2+4(m-n-4)a+(4n-m^2)=0$. (2')

Scanned with CamScanner

Theo đề bài, ta phải có $\frac{1}{3} \le a \le 3$. Như vậy cần tìm m, n để (2') có hai nghiệm là $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 3$. Theo hệ thức Viète đối với phương trình (2'):

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \dfrac{-4(m-n-4)}{12} \\ a_1 a_2 = \dfrac{4n-m^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} + 3 = \dfrac{4+n-m}{3} \\ \dfrac{1}{3}.3 = \dfrac{4n-m^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+n-m=10 \\ 4n-m^2=12. \end{cases}$$

Thay $n = 6 + m$ vào $4n - m^2 = 12$, ta được $m^2 - 4m - 12 = 0$ nên $m = 6$ hoặc $m = -2$.

Với $m = 6$ thì $n = 12$, khi đó $A = \frac{x^2+6x+12}{x^2+2x+4}$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ và giá trị lớn nhất là 3.

Với $m = -2$ thì $n = 4$, khi đó $A = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ và giá trị lớn nhất là 3.

BÀI TẬP

147(2). Chứng minh rằng:

a) Nếu $x + y + xy = (x + y)^2$ thì $-\frac{1}{3} \le x \le 1$; $-\frac{1}{3} \le y \le 1$.

b) Nếu $x^2 = 3(xy + y - y^2)$ thì $0 \le y \le 4$.

c) Nếu $a + b + c = 5$ và $ab + bc + ac = 8$ thì $1 \le a \le \frac{7}{3}$; $1 \le b \le \frac{7}{3}$; $1 \le c \le \frac{7}{3}$.

148(2). Cho biểu thức $A = a + b + c - abc$ với $0 \le a \le b \le c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng $A \le 2$.

149(4). Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình

$$2x - z^4 = \frac{1}{2};\ 2y - x^4 = \frac{1}{2};\ 2z - y^4 = \frac{1}{2}.$$

150(4). Cho các số x, y, z thoả mãn các phương trình:

$$x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3} \quad (1),\ y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3} \quad (2),\ z^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}. \quad (3)$$

a) Chứng minh rằng $x, y, z > 0$. b) Chứng minh rằng $x = y = z$.

c) Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình trên.

151(2). Cho phương trình $3x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$ (Ví dụ 41).

Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 bằng cách tìm nghiệm của phương trình rồi giải bất phương trình vô tỉ.

Scanned with CamScanner

152(2). Tìm giá trị lớn nhất của a, biết $a + b + c = 15$ và $ab + bc + ca = 72$.

153(2). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $A = a + b + c$ với $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.

Hướng dẫn. Để tìm giá trị lớn nhất của A, hãy tính b và c rồi chứng minh

$$a \le 2 - \frac{(b+c)^2}{4}.$$

154(2). Tìm giá trị của a để nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 + 2ax + (a+1)^2 = 0$.

a) Đạt giá trị nhỏ nhất; b) Đạt giá trị lớn nhất.

155*(2). Cho phương trình $x^2 + ax + (a - 5) = 0$ với $a \ge -1$. Tìm giá trị lớn nhất mà nghiệm của phương trình đó có thể đạt được.**156(2).** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:

a) $A = \dfrac{x}{x^2+1}$; b) $B = \dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$;

c) $C = \dfrac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$; d) $D = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+1}$.

157*(2). Tìm các số m, n để biểu thức $A = \dfrac{2x^2+mx+n}{x^2+1}$ nhận giá trị nhỏ nhất bằng 1, giá trị lớn nhất bằng 6.

158(2). Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}$ với $x > 0$;

b) $B = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{(x-y)^2}$ với $x, y > 0$ và $xy = 1$;

c) $C = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ với $x > y > 0$ và $xy = 4$;

d) $D = \dfrac{x^2+y^2}{x-y+1}$ với $x > y > 0$ và $xy = 4$.

159(2). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:

a) $A = x - y$ với $x^2 + 4y^2 = 5$; b) $B = x + 2y$ với $x^2 + 2xy + 3y^2 = 6$;

c) $C = \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

160*(2). Tìm các số nguyên dương n để giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau đều là các số nguyên:

a) $A = \dfrac{2x^2+m}{x^2+2x+2}$; b) $B = \dfrac{4x^2+10x+n}{x^2+1}$.

Scanned with CamScanner

CHƯƠNG III. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

§1. GÓC NỘI TIẾP

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắc các cung bằng nhau thì bằng nhau.

Nếu hai cát tuyến AB, CD của một đường tròn cắt nhau tại điểm M (ở bên trong hoặc ở bên ngoài đường tròn) thì ta có hệ thức MA.MB = MC.MD.

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC = 2R, E là điểm chính giữa của nửa đường tròn, A là điểm chính giữa của cung BE. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng $HC - HB = R\sqrt{2}$.

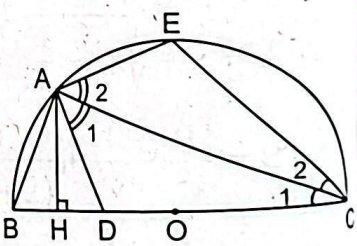
Giải. (h.8). Lấy D đối xứng với B qua H thì $HC - HB = HC - HD = CD$. Ta sẽ chứng minh CD = CE.

Ta có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (góc nội tiếp).

$\widehat{A_2} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CE} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

ΔABD cân tại A có $2\hat{B}$ = sđ $\overset{\frown}{AC} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

nên $\widehat{BAD} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.



Hình 8

$\Delta ACD = \Delta ACE$ (g.c.g) nên $CD = CE = R\sqrt{2}$.

Vậy $HC - HB = R\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. a) Chứng minh rằng khoảng cách từ trực tâm đến đỉnh của một tam giác gấp đôi khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh đối diện.

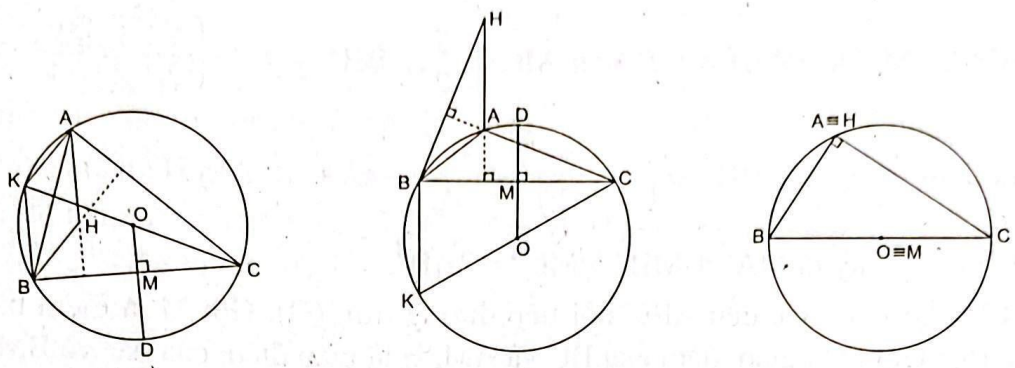
b) Tính số đo góc A của tam giác ABC biết rằng khoảng cách từ A đến trực tâm của tam giác bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải. (h.9). a) Xét ΔABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm, M là hình chiếu của O trên BC. Ta sẽ chứng minh AH = 2OM.

Nếu $\hat{A} = 90^\circ$ thì H trùng A và M trùng O (h.9c), AH = 2OM đúng.

Xét $\hat{A} < 90^\circ$ (h.9a) và $\hat{A} > 90^\circ$ (h.9b): Kẻ đường kính CK.

Scanned with CamScanner



a) *b)* *c)*

Hình 9

Ta có $\overset{\frown}{KBC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) mà $AH \perp BC$ nên $KB \,//\, AH$. Chứng minh tương tự $KA \,//\, BH$. Do đó AKBH là hình bình hành. Suy ra $AH = KB = 2OM$.

b) Khi $AH = OD$ thì $2OM = OD \Rightarrow OM = MD \Rightarrow \Delta OCD$ đều

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 60^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 120^\circ$.

Nếu $\overset{\frown}{BAC} < 90^\circ$ (h.9a) thì $\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Nếu $\overset{\frown}{BAC} > 90^\circ$ (h.9b) thì $\overset{\frown}{BmC} = 240^\circ$ nên $\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BmC} = 240^\circ : 2 = 120^\circ$.

Vậy $\widehat{A} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{A} = 120^\circ$.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung BC.

a) Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

b) Gọi D là giao điểm của MA và BC. Chứng minh rằng $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.

c*) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2$.

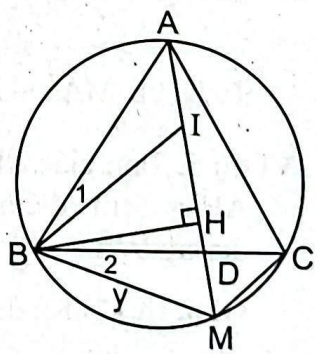
Giải. (h.10) a) Trên MA lấy I sao cho MI = MB. Tam giác MBI đều, suy ra $\overset{\frown}{IBM} = 60^\circ$, do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

$\Delta ABI = \Delta CBM$ (c.g.c) nên $AI = MC$. Từ đó $MA = MB + MC$.

b) $\Delta MCD \backsim \Delta MAB$ (g.g) nên $\frac{MD}{MB} = \frac{MC}{MA}$, $\frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA}$.

Do đó

$$\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = \frac{MC}{MA} + \frac{MB}{MA} = \frac{MC + MB}{MA} = 1 \text{ (theo câu a).}$$



Hình 10

c) Đặt $MA = x$, $MB = y$. Ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x - y)^2$$
$$= 2(x^2 + y^2 - xy). \quad (1)$$

Scanned with CamScanner

Kẻ $BH \perp AM$. Do $\widehat{BMH} = 60^\circ$ nên $MH = \frac{y}{2}$, $BH^2 = y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4}$.

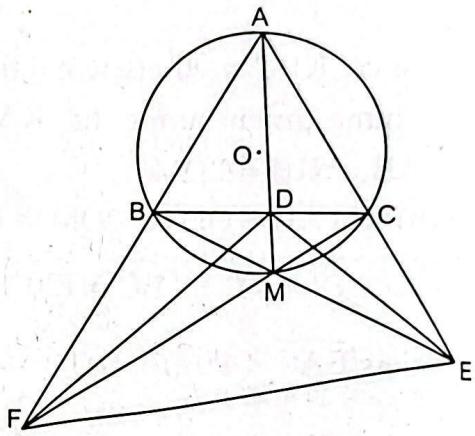
Do đó $AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = x^2 + y^2 - xy.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2$.

Ví dụ 4*. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm bất kì thuộc cung BC. Gọi D là giao điểm của BC và AM, E là giao điểm của AC và BM, F là giao điểm của AB và CM. Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF gấp đôi diện tích tam giác ABC.

HD. Dựa vào kết quả của Ví dụ 3.

Giải. (h.11)



Hình 11

$S_{MEF} = \frac{1}{2} ME \cdot MF \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} ME \cdot MF.$

Ta có $\Delta MAE \backsim \Delta MBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MC}{MB}$,

$\Delta MAF \backsim \Delta MBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{MB}{MC}$,

suy ra $\frac{ME \cdot MF}{MA^2} = 1.$

Do đó $S_{MEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} MA^2.$

Tương tự, từ $\Delta MDB \backsim \Delta CDA$ và $\Delta MFB \backsim \Delta CAD$ ta có $\frac{MD \cdot MF}{MB^2} = 1$ nên

$S_{MDF} = \frac{\sqrt{3}}{4} MB^2.$

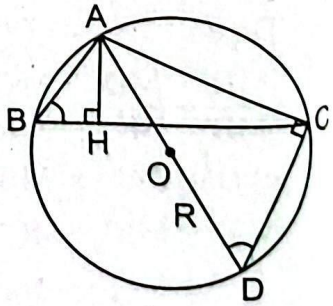
Tương tự $S_{MDE} = \frac{\sqrt{3}}{4} MC^2$. Suy ra $S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right).$

Ta lại có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2$ (Ví dụ 3) nên $S_{DEF} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2S_{ABC}.$

Ví dụ 5. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có AB = 8cm, AC = 15cm, đường cao AH = 5cm (điểm H nằm trên cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

Giải. (h.12) Kẻ đường kính AD. Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung), $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vậy $\Delta AHB \backsim \Delta ACD$ (g.g)



Hình 12

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{15} = \frac{8}{2R} \Rightarrow R = 12$ (cm).

Bán kính của đường tròn (O) bằng 12cm.

Chú ý: Nếu điểm H nằm ngoài cạnh BC, ta vẫn có R = 12 cm (xem Ví dụ 22).

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC có BC = a, AC = b, AB = c, diện tích S nội tiếp đường tròn (O;R). Chứng minh rằng:

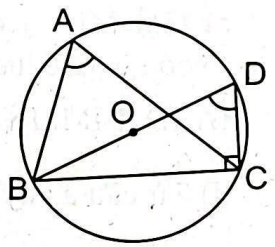
a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$; b) $S = \frac{abc}{4R}$.

Giải. (h.13) a) Kẻ đường kính BD. Ta có $\widehat{D} = \widehat{A}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC). Trong ΔBCD vuông tại C, ta có

$BC = BD\sin D = 2R\sin A$ nên $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Chứng minh tương tự $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

Vậy $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.



Hình 13

b)Ta có $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ mà $\sin C = \frac{c}{2R}$ nên $S = \frac{abc}{4R}$.

Lưu ý. Công thức $S = \frac{abc}{4R}$ cũng đúng với tam giác bất kì, xem Ví dụ 22.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác AD. Gọi E là giao điểm thứ hai của AO với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Chứng minh rằng AD vuông góc với BE.

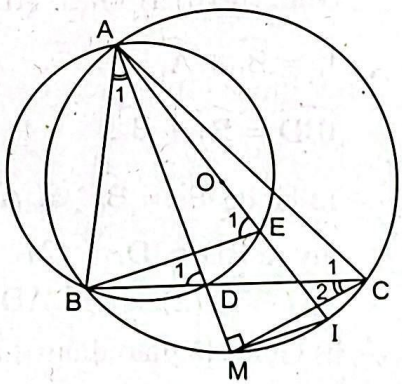
Giải (h.14). Kéo dài AD và AO cắt đường tròn (O) ở M và I.

Ta có $\overset{\frown}{AMI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên AD ⊥ MI. (1)

Theo tính chất góc nội tiếp, ta có

$\overset{\frown}{AIM} = \overset{\frown}{ACM} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{C_1} + \widehat{A_1}$. (2)

Theo tính chất góc nội tiếp và góc ngoài của tam giác, ta có $\widehat{E_1} = \widehat{D_1} = \widehat{C_1} + \overset{\frown}{DAC}$ (3)



Hình 14

Ta lại có $\widehat{A_1} = \overset{\frown}{DAC}$ nên từ (2) và (3) suy ra $\overset{\frown}{AIM} = \widehat{E_1}$, do đó BE // MI. (4)

Từ (1) và (4) suy ra AD ⊥ BE.

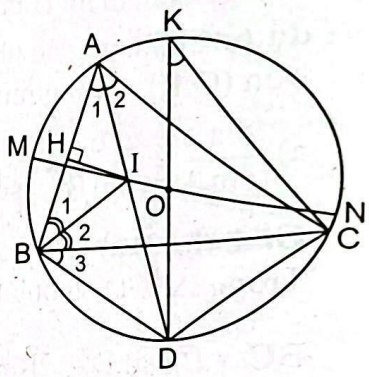
Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), gọi (I; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của OI. Chứng minh rằng:

Scanned with CamScanner

a) $\Delta AHI \backsim \Delta KCD$; b) $DI = DB = DC$;

c) $IA.ID = R^2 - d^2$; d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (*định lí Euler*).

Giải. (h.15) a) Xét hai tam giác KCD và AHI, ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{K}$, $\widehat{AHI} = \widehat{KCD} = 90^\circ$ nên $\Delta AHI \backsim \Delta KCD$ (g.g).



Hình 15

b) $\widehat{BID} = \widehat{B_1} + \widehat{A_1}$, $\widehat{IBD} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3}$. Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{B_3}$ nên $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$.

Suy ra $DI = DB$. Tương tự $DI = DC$.

Vậy $DI = DB = DC$.

c) Gọi MN là đường kính đi qua I của đường tròn (O). Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có

$IA.ID = IM.IN = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$. (1)

d) Từ câu a suy ra $\dfrac{IA}{DK} = \dfrac{IH}{DC}$ nên $IA.DC = DK.IH = 2Rr$.

Do $DC = DI$ (câu b) nên ta có $IA.ID = 2Rr$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R^2 - d^2 = 2Rr$, tức là $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Lưu ý. Từ câu d ta suy ra $R \geq 2r$.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thoả mãn $\widehat{OIA} = 90^\circ$.

a) Gọi D là giao điểm thứ hai của AI với (O). Chứng minh rằng $AD = 2BD$.

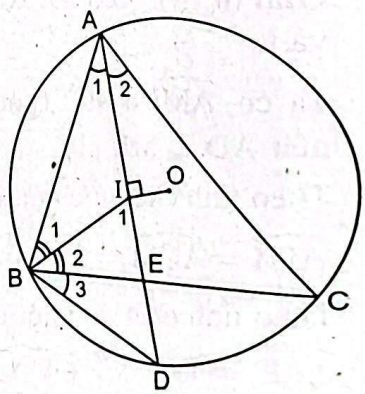
b) Chứng minh rằng $AB + AC = 2BC$.

Giải. (h.16) a) $OI \perp AD \Rightarrow AI = ID \Rightarrow AD = 2ID$. (1)

$\widehat{I_1} = \widehat{B_1} + \widehat{A_1}$

$\widehat{IBD} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3}$.

Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{B_3}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{IBD}$, suy ra $BD = ID$. (2)



Hình 16

Từ (1) và (2) suy ra $AD = 2BD$.

b) Gọi E là giao điểm của AD và BC.

ΔDAB và ΔDBE có $\widehat{D}$ là góc chung, $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$ nên

$\Delta DAB \backsim \Delta DBE \Rightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AD}{BD} = 2 \Rightarrow AB = 2BE$.

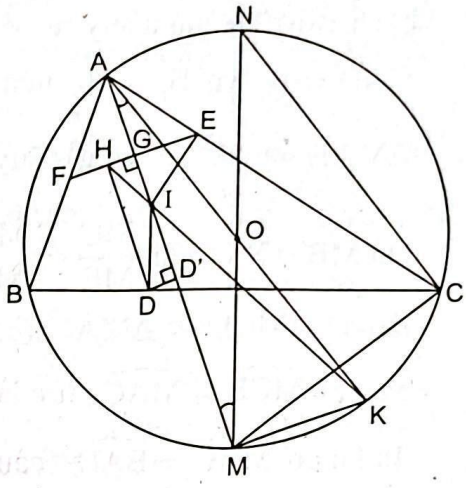
Chứng minh tương tự $AC = 2CE$. Suy ra $AB + AC = 2(BE + CE) = 2BC$.

Ví dụ 10*. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), I là giao điểm của các đường phân giác. Gọi D, E, F là các hình chiếu của I trên BC, AC, AB. Vẽ đường kính AK. Gọi H là giao điểm của IK và EF.

Scanned with CamScanner

a) Gọi M là giao điểm của AI với đường tròn (O). Vẽ đường kính MN. Chứng minh rằng $\Delta IEG \backsim \Delta MNC$.

b) Chứng minh rằng DH vuông góc với EF.



Hình 17

Giải (h.17) a) $\widehat{IEG} = \widehat{MAC} = \widehat{N}$ nên $\Delta IEG \backsim \Delta MNC$ (g.g).

b) Kẻ $DD' \perp AM$. Ta sẽ chứng minh $HG = DD'$ bằng cách chứng minh $\frac{HG}{MK} = \frac{DD'}{MK}$.

Ta có $\frac{HG}{MK} = \frac{IG}{IM}$ (do $HG \,//\, MK$) $= \frac{IG}{MC}$

(do IM = MC, dễ chứng minh) $= \frac{IE}{MN}$ (do câu a) (1)

Ta có $\widehat{I_1} = \widehat{M_1} = \widehat{MAK}$ nên $\Delta ID'D \backsim \Delta AMK$ (g.g)

Suy ra $\frac{DD'}{MK} = \frac{ID}{AK} = \frac{IE}{MN}$ (do ID = IE và AK = MN). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HG}{MK} = \frac{DD'}{MK}$, do đó HG = DD'.

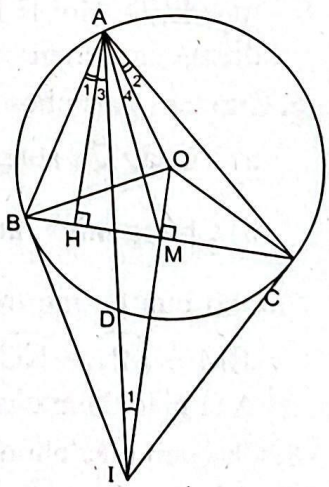
Tứ giác HGDD' là hình chữ nhật nên $DH \perp EF$.

Ví dụ 11. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và tại C cắt nhau ở I. Gọi M là giao điểm của IO và BC, D là giao điểm thứ hai của IA với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$.

b) Trên MA lấy điểm E sao cho $\widehat{MBE} = \widehat{MBD}$. Chứng minh rằng E đối xứng với D qua BC.

Giải. a) (h.18a) Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)



Hình 18a

$\Rightarrow 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (1).

ΔOBI vuông tại B, đường cao BM nên

$OM \cdot OI = OB^2 = OA^2$ suy ra $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OI}$.

$\Delta OMA \backsim \Delta OAI$ (c.g.c) nên $\widehat{A_4} = \widehat{I_1}$.

Ta lại có AH // OI nên $\widehat{A_3} = \widehat{A_1}$ suy ra $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_3} = \widehat{A_2} + \widehat{A_4}$, tức là $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$.

Scanned with CamScanner

b) (h.18b) Từ câu a suy ra $\overset{\frown}{MAB} = \overset{\frown}{CAD}$. Ta lại có $\overset{\frown}{CAD} = \widehat{B_1}$ và $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ nên $\overset{\frown}{MAB} = \widehat{B_2}$, suy ra $\Delta MAB \backsim \Delta MBE$ (g.g). Suy ra $\frac{MB}{ME} = \frac{MA}{MB}$.

Do MB = MC nên $\frac{MC}{ME} = \frac{MA}{MC}$.

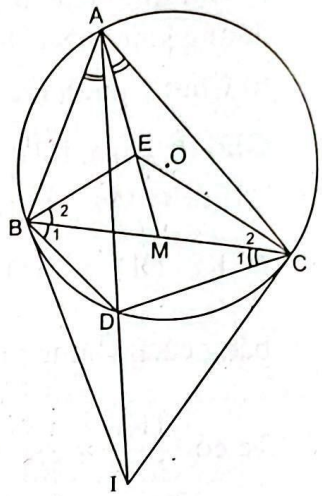
Do đó $\Delta MCE \backsim \Delta MAC$ (c.g.c).

Suy ra $\overset{\frown}{MCE} = \overset{\frown}{MAC}$, tức là $\widehat{C_2} = \overset{\frown}{MAC}$.

Ta lại có $\overset{\frown}{MAC} = \overset{\frown}{BAD}$ (câu a) và $\overset{\frown}{BAD} = \widehat{C_1}$ nên $\widehat{C_2} = \widehat{C_1}$.

$\Delta EBC = \Delta DBC$ (g.c.g) nên BE = BD và CE = CD.

Suy ra BC là đường trung trực của DE. Vậy E đối xứng với D qua BC.



Hình 18b

BÀI TẬP

1. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 24 cm, các dây AC = 8 cm, AD = 15 cm. Tính khoảng cách từ A đến CD.

2. Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 12 cm. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) ở M và cắt tiếp tuyến của đường tròn tại B ở N. Gọi I là trung điểm của MN. Tính độ dài AM, biết rằng AI = 13 cm.

3. Cho đường tròn tâm O bán kính R, các đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn ở E, EA cắt CD ở K. Tính độ dài DK.

4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE. Chứng minh rằng các tam giác OBE và OCD có diện tích bằng nhau.

5. Cho tam giác nhọn ABC. Nửa đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự ở E, D. Gọi H là giao điểm của BD và CE, I là trung điểm của AH. Gọi K là giao điểm của OI với nửa đường tròn. Chứng minh rằng CK là tia phân giác của góc DCE.

6. Cho tam giác nhọn ABC, AB ≤ AC, tia phân giác của góc A cắt đường tròn ở D.

a) Vẽ dây CE song song AD. Chứng minh rằng AC = DE, AD = BE.

b) Chứng minh rằng $AD > \frac{AB + AC}{2}$.

7. Cho nửa đường tròn đường kính BC. Các điểm M, N thuộc nửa đường tròn sao cho $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NC}$. Các điểm D, E thuộc đường kính BC sao cho BD = DE = EC. Gọi A là giao điểm của MD và NE. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở M, N, K. Chứng minh rằng $\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF} = 4$.

Scanned with CamScanner

9. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, bán kính OC = R. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cung AC, CB. Gọi E, G theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên AB. Gọi F, H theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên OC. Chứng minh rằng EF = GH.

10. Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vẽ các dây AA'//BC, BB'//AC, CC'//AB. Trên các cung AA', BB', CC', lấy các cung AD, BE, CF theo thứ tự bằng $\frac{1}{3}$ các cung trên. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

11. Các đường cao BH, CK của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp theo thứ tự ở D, E. Tính số đo góc A biết rằng DE là đường kính của đường tròn.

12. Cho tam giác ABC có AB = 5, AC = 6, BC = 7. Chứng minh rằng tồn tại một điểm E thuộc cạnh AC sao cho các độ dài BE, AE, CE là những số tự nhiên.

13. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 54^\circ$, $\widehat{C} = 18^\circ$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng AC – AB = R.

14. Hai đường tròn tâm O và O' cùng bán kính R cắt nhau ở A và B. Một đường thẳng d song song với OO' cắt các đường tròn trên tại các điểm C, D, E, F theo thứ tự trên d (C, E ∈ (O); D, F ∈ (O')).

a) Chứng minh rằng CDO'O là hình bình hành.

b) Tính độ dài CD biết AB = a.

c) Chứng minh rằng số đo góc CAD không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d (d luôn luôn song song với OO').

15. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} > 90^\circ$, các điểm D và E thuộc cạnh BC (D nằm giữa B và E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACD cắt nhau ở điểm thứ hai I. Tia phân giác của góc IAB cắt cung IB ở H, tia phân giác của góc IAC cắt cung IC ở K. Chứng minh rằng AH vuông góc với KD, AK vuông góc với HE.

16. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Trên AD lấy các điểm E và F sao cho $\overset{\frown}{ABE} = \overset{\frown}{CBF}$. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{ACE} = \overset{\frown}{BCF}$.

Hướng dẫn. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC.

17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là giao điểm các đường phân giác, AI cắt đường tròn (O) ở D. Đường kính DE của đường tròn (O) cắt BC ở M.

Chứng minh rằng:

a) ΔDIM ∽ ΔDEI ; b) $\overset{\frown}{BMI} = \overset{\frown}{AEI}$.

18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có I là giao điểm các đường phân giác, M là trung điểm của BC thoả mãn $\overset{\frown}{BIM} = 90^\circ$, CI cắt đường tròn (O) ở E. Chứng minh rằng CI = 2IE.

19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Tiếp tuyến của đường tròn (I) song song với BC cắt AB và AC theo thứ tự ở H và K, HK cắt đường tròn (O) ở D và E. Chứng minh rằng $AD \cdot AE = AI^2$.

Scanned with CamScanner

20*. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

21. Cho đường tròn (O) đường kính AB, C đối xứng với O qua A. Vẽ hai cát tuyến CDE và CFH đối xứng với nhau qua CB (D nằm giữa C và E, F nằm giữa C và H). Gọi K là giao điểm của EF và AB. Chứng minh rằng AK = OK.

22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, H là hình chiếu của K trên BC. Gọi D là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O), E là giao điểm thứ hai của DH với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $DK^2 = DH \cdot DE$; b) $\widehat{AEK} = 90^\circ$.

23. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB có dây CD vuông góc với AB. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (MC không song song với AB), E là giao điểm của MD và AB, F là giao điểm của MC và AB. Chứng minh rằng $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB}$.

24. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến ABC. Gọi E là điểm chính giữa của cung BC, DE là đường kính của đường tròn. AD cắt đường tròn tại I, IE cắt BC tại K. Chứng minh rằng AC. BK = AB. KC.

25. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$ nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm. OH cắt AB, AC theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng EF = BE + CF.

26. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm, I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc OAH.

b) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$, chứng minh rằng IO = IH.

27. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm. Đường trung trực của AH cắt AB, AC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng:

a) $\Delta OAM \backsim \Delta CAH$;

b) OA là tia phân giác của góc MON.

28. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A} > 90^\circ\right)$ nội tiếp đường tròn (O) trực tâm H. Đường trung trực của AH cắt BA và CA theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $\Delta OAM \backsim \Delta CAH$;

b) OA là tia phân giác của góc MON.

29. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Gọi AD là đường phân giác của tam giác ABC, xy là đường phân giác góc ngoài tại A. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của H trên AD, xy. Chứng minh rằng FE đi qua trung điểm của BC.

30. Chó tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là giao điểm các đường phân giác, AI cắt đường tròn (O) tại D. Vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với BC tại H. Kẻ tiếp tuyến IE với đường tròn (D), E và C cùng phía đối với ID. Chứng minh rằng IE song song với AC.

Scanned with CamScanner

31. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), tia phân giác của góc A cắt đường tròn ở M. Kẻ đường kính MN cắt BC ở K. Gọi F là điểm thuộc cạnh AB, G là hình chiếu của F trên AM. Đường vuông góc với AF và tại F cắt AM ở I. Gọi D là giao điểm của FG và IN. Chứng minh rằng $\widehat{FDK} = 90^\circ$.

32. Cho tam giác ABC, (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AC, AB. Kẻ DH vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) ở K. Chứng minh rằng $\widehat{FIK} = \hat{C}$.

33*. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), I là giao các đường phân giác. Gọi D là hình chiếu của I trên BC. Đường tròn đường kính AI cắt AC, AB theo thứ tự ở E, F và cắt đường tròn (O) ở K khác A.

a) Chứng minh rằng KD là tia phân giác của góc BKC.

b) Gọi H là giao điểm của IK và EF. Chứng minh rằng DH vuông góc với EF.

34*. Tính bán kính của hình viên phân BC có dây BC = 6cm, cạnh của hình vuông MNPQ nội tiếp viên phân ấy bằng 2 cm (M và N thuộc BC, P và Q thuộc cung BC).

35*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó; M, N , P theo thứ tự là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh rằng K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

36. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB, H là hình chiếu của C trên AB. Các điểm D, E thuộc nửa đường tròn đó sao cho HC là tia phân giác của góc DHE. Chứng minh rằng $HC^2 = HD.HE$.

37. Một đường tròn tâm O đi qua đỉnh A và các trung điểm D, E của các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho BC tiếp xúc với đường tròn tại K. Chứng minh rằng $KA^2 = KB.KC$.

38. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng $AB^2 - AM^2 = MB.MC$ (bằng cách vẽ đường tròn tâm A bán kính AB).

39. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm nằm trên nửa đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H và cắt đường tròn (O) tại C và D. Chứng minh rằng CD đi qua trung điểm của MH.

40*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{2}{AD^2}.$$

41. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Chứng minh rằng

$$AD^2 = AB.AC - DB.DC$$

(bằng cách vẽ giao điểm E của AD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

42*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung BC không chứa A. Gọi MH, MI, MK theo thứ tự là các đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC. Chứng minh rằng $\frac{BC}{MH} = \frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK}$.

Scanned with CamScanner

43*. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Các điểm M, N theo thứ tự di chuyển trên các đường tròn (O), (O') sao cho chiều từ A đến M và từ A đến N trên các đường tròn đều theo chiều quay của kim đồng hồ và các cung $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{AN}$ có số đo bằng nhau. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn: MN đi qua B.

44. Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, AB tại E, F. Lấy các điểm I và K sao cho BI = BA và CK = CA. Chứng minh rằng:

a) OI = OK; b) $\overset{\frown}{IOF} = \overset{\frown}{KOE}$.

45*. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các cát tuyến ABC và ADE với đường tròn. Gọi K là giao điểm của BE và CD. Vẽ hình bình hành BKDI. Chứng minh rằng:

a) $\Delta IAD \backsim \Delta KAC$; b) $\overset{\frown}{AIB} = \overset{\frown}{AKE}$.

46. Cho tam giác ABC. Gọi M, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AB, AC. Đặt $\overset{\frown}{MAC} = \alpha$. Trong góc BAC, kẻ tia Ax sao cho $\overset{\frown}{BAx} = \alpha$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt Ax ở K. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AFK} = \overset{\frown}{AMB}$; b) $\overset{\frown}{ACK} \doteq \alpha$.

47*. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi I là điểm thuộc cung BC, M là trung điểm của AI. Đường tròn đi qua C, M, I cắt ID ở E. Chứng minh rằng:

a) $\Delta CED \backsim \Delta CMA$; b) $\overset{\frown}{BED} = 90^\circ$.

48*. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, K là giao điểm các đường phân giác của các góc ABH và ACH. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{HAB} = \overset{\frown}{HAC}$; b) $\overset{\frown}{BKC} = 90^\circ$;

c) MK // OA; d) MK đi qua trung điểm của AH.

49*. Cho hình thang ABCD (AB // CD), các đường chéo cắt nhau ở O. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD và BOC cắt nhau ở I (khác O).

a) Chứng minh rằng $\frac{IA}{ID} = \frac{OC}{OD}$;

b) Gọi M là trung điểm của CD. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{IOD} = \overset{\frown}{MOC}$.

~ **Ví dụ:** 59.

Bài tập: 278, 281, 284, 292, 299, 300, 302, 307 đến 312.

Scanned with CamScanner

§2. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VỚI DÂY

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Nếu góc BAx có số đo bằng nửa số đo của cung BA nằm trong góc đó thì Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn chứa cung AB.

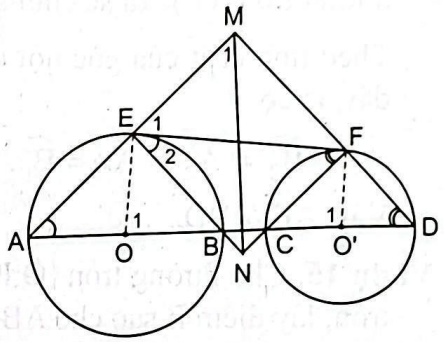
Nếu MT là tiếp tuyến và MAB là cát tuyến của một đường tròn thì ta có hệ thức $MT^2 = MA.MB$.

Ví dụ 12. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF, E ∈ (O), F ∈ (O'). Gọi M là giao điểm của AE và DF, N là giao điểm của EB và FC. Chứng minh rằng:

a) MENF là hình chữ nhật;

b) MN vuông góc với AD;

c) ME.MA = MF.MD.



Hình 19

Giải. (h.19) a) Theo tính chất góc nội tiếp:

$\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{O}_1$, $\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{O}'_1$, mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O}'_1 = 180^\circ$

(vì OE // O'F) nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{AMD} = 90^\circ$. Ta lại có $\widehat{MEB} = 90^\circ$, $\widehat{MFC} = 90^\circ$.

Tứ giác MENF có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) Theo tính chất hình chữ nhật: $\widehat{M}_1 = \widehat{E}_1$.

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây, ta có $\widehat{A} = \widehat{E}_2$.

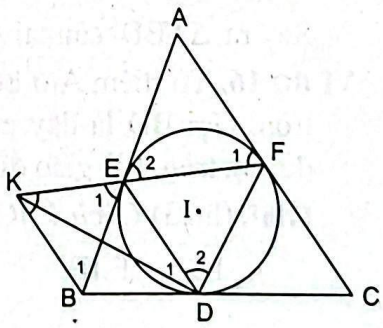
Suy ra $\widehat{M}_1 + \widehat{A} = 90^\circ$. Do đó MN ⊥ AD.

c) $\Delta MFE \backsim \Delta MAD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{ME}{MD} \Rightarrow ME.MA = MF.MD$.

Ví dụ 13. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm trên BC, AB, AC theo thứ tự là D, E, F. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt FE ở K. Chứng minh rằng:

a) Tam giác BEK là tam giác cân;

b) $\widehat{KDF} = 90^\circ$.



Hình 20

Giải. (h.20) a) Ta có $\widehat{F}_1 = \widehat{E}_2$ (cùng chắn cung EF), $\widehat{F}_1 = \widehat{BKE}$ (so le trong, BK // AC), $\widehat{E}_2 = \widehat{E}_1$ (đối đỉnh) nên $\widehat{BKE} = \widehat{E}_1$, do đó ΔBEK cân.

b) Ta có BD = BE = BK nên D, E, K thuộc đường tròn (B), do đó $\widehat{D}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B}_1$ (góc nội tiếp và góc ở tâm).

Scanned with CamScanner

$\widehat{D_2} = \widehat{F_1}$ (bằng nửa số đo cung EF) mà $\widehat{F_1} = \widehat{BKE}$ nên $\widehat{D_2} = \widehat{BKE}$.

Suy ra $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \frac{1}{2}\widehat{B_1} + \widehat{BKE} = 90^o$ (do ΔBKE cân). Vậy $\widehat{KDF} = 90^o$.

Ví dụ 14. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó $O' \in (O)$. Gọi C là điểm bất kì nằm trên đường tròn (O) và nằm ngoài đường tròn (O'). Gọi giao điểm thứ hai của CA và CB với đường tròn (O') là D và E. Chứng minh rằng AE song song với BD.

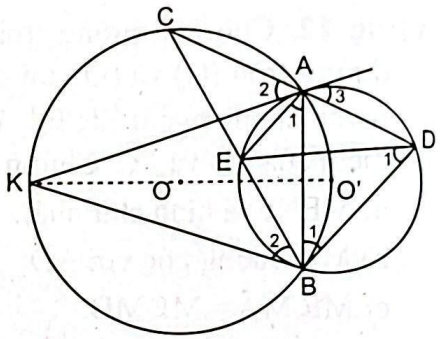
Giải. (hình 21 ứng với A nằm giữa C và D, trường hợp D nằm giữa A và C tương tự)

Vẽ đường kính O'OK thì KA và KB là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Ta sẽ chứng minh $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tiếp tuyến với dây, ta có

$\widehat{A_1} = \widehat{B_2} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{B_1}$.

Vậy AE // BD.



Hình 21

Ví dụ 15. Cho đường tròn (O;R), điểm A trên đường tròn. Trên tiếp tuyến Ax của đường tròn, lấy điểm B sao cho AB = R. Kẻ cát tuyến BCD (C nằm giữa B và D) cắt bán kính OA. Biết $\widehat{AD} = 2\widehat{AC}$, chứng minh rằng AD = R.

Giải. (h.22) $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AD}$ (góc nội tiếp);

$\widehat{CAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AC}$ (góc tiếp tuyến – dây);

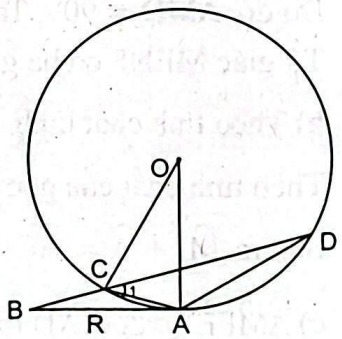
Ta có $\widehat{AD} = 2\widehat{AC}$ nên $\widehat{C_1} = 2\widehat{CAB}$.

Ta lại có $\widehat{C_1} = \widehat{CAB} + \widehat{B}$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{B}$ (1)

$\widehat{CAB} = \widehat{D}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AC}$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Suy ra ΔABD cân tại A nên AD = AB = R.



Hình 22

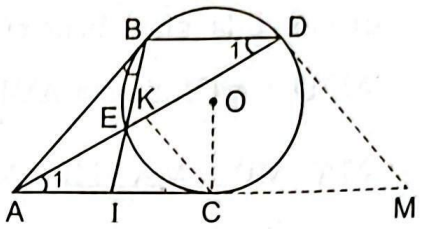
Ví dụ 16. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi BD là dây của đường tròn song song với AC, E là giao điểm của AD với đường tròn, I là giao điểm của BE và AC. Chứng minh rằng I là trung điểm của AC.

Giải. (h.23) *Cách 1.* IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$IC^2 = IE.IB.$ (1)

Scanned with CamScanner

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây, ta có $\widehat{EBA} = \widehat{D_1}$, mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong, BD // AC) nên $\widehat{EBA} = \widehat{A_1}$.



Hình 23

$\Delta IBA \backsim \Delta IAE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE.IB. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IA = IC.

Cách 2. Kẻ tiếp tuyến với (O) tại D, cắt AC ở M. Hình thang ABDM có $\widehat{DBA} = \widehat{BDM}$ nên là hình thang cân. Suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{M}$ và C là trung điểm của AM.

Gọi K là trung điểm của AD, ta có CK là đường trung bình của ΔADM nên

$$CK = \frac{MD}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}.$$

ΔABI và ΔCAK có AB = AC, $\widehat{ABI} = \widehat{CAK}$ (cùng bằng $\widehat{D_1}$), $\widehat{BAI} = \widehat{ACK}$ (cùng bằng $\widehat{M}$) nên $\Delta ABI = \Delta CAK$ (g.c.g). Suy ra AI = CK.

Do $CK = \frac{AC}{2}$ nên $AI = \frac{AC}{2}$, hay AI = IC.

Ví dụ 17. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và tại C cắt nhau ở K.

a) Đường tròn (K;KB) cắt AB ở E (khác B) và cắt AC ở F (khác C). Chứng minh rằng E, K, F thẳng hàng.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAK} = \widehat{MAC}$.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của AK và (O). Chứng minh rằng $MA \cdot MD = \frac{BC^2}{4}$.

Giải. (h.24) a) Xét các tam giác cân tại K là EKB, BKC, CKF

ta có $\widehat{EKB} = 180^\circ - 2\widehat{B_1}$

$\widehat{BKC} = 180^\circ - 2\widehat{KBC}$

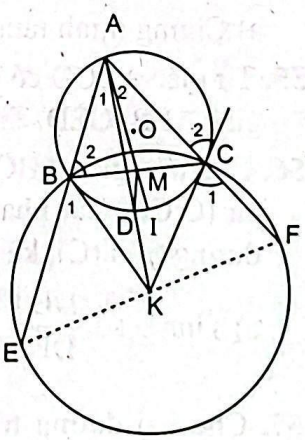
$\widehat{CKF} = 180^\circ - 2\widehat{C_1} = 180^\circ - 2\widehat{B_2}$

Cộng ba đẳng thức trên:

$$\widehat{EKB} + \widehat{BKC} + \widehat{CKF} = 540^\circ - 2\left(\widehat{B_1} + \widehat{KBC} + \widehat{B_2}\right)$$

$$= 540^\circ - 2 \cdot 180^\circ = 180^\circ$$

Vậy E, K, F thẳng hàng.



Hình 24

b) ΔABC và ΔAFE có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{B_2} = \widehat{C_2} = \widehat{C_1} = \widehat{F}$ nên đồng dạng, AM và AK là các trung tuyến tương ứng nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Scanned with CamScanner

c) Gọi I là giao điểm của AM và (O). Do $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CI}$, BD = CI, $\overset{\frown}{MBD} = \overset{\frown}{MCI}$. Suy ra $\Delta MBD = \Delta MCI$ (c.g.c), do đó MD = MI.

$$MA \cdot MD = MA \cdot MI = MB \cdot MC = \frac{BC}{2} = \frac{BC}{2} = \frac{BC^2}{4}.$$

BÀI TẬP

50. Cho tam giác ABC. Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B. Kẻ dây BD song song với AC. Gọi I là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{IAB} = \overset{\frown}{IBC} = \overset{\frown}{ICA}$.

51. Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Dây BC của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại H. Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm (khác A) của AB, AC với đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng:

a) DE song song với BC;

b) AH là tia phân giác của góc BAC.

52. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) ở C và D. Kẻ dây BN của đường tròn (O), cắt đường tròn (A) tại điểm E ở bên trong đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{CEN} = \overset{\frown}{EDN}$; b) $NE^2 = NC.ND$.

53. Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính 5 cm. Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc B tại K. Tính độ dài BK, biết rằng BK cắt AC tại D và BD = 4 cm.

54. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B và tiếp xúc với AC tại C. Gọi I là điểm thuộc cung lớn BC (IB > IC). Gọi D là điểm đối xứng với C qua IB, E là điểm đối xứng với B qua IC.

a) Chứng minh rằng $\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{ACE}$ và AD = AE. b) Tính góc DAE.

55. Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau ở E. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEB, CED. Tìm điều kiện của tứ giác để hai đường tròn tiếp xúc nhau.

56. Cho tam giác ABC có AB = 2 cm, AC = 3 cm, BC = 4 cm. Vẽ các đường tròn (B;BA) và (C;CA) cắt nhau ở điểm thứ hai D. Kẻ dây AE của đường tròn (B) tiếp xúc với đường tròn (C), kẻ dây AF của đường tròn (C) tiếp xúc với đường tròn (B).

a) Tính tỉ số $\frac{DE}{DF}$. b) Gọi I là giao điểm của AD và EF. Tính tỉ số $\frac{IE}{IF}$.

57. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B thoả mãn $\overset{\frown}{OAO'} = 90^\circ$. Một đường thẳng đi qua O cắt đường tròn (O) ở C và D, cắt đường tròn (O') ở E và F (theo thứ tự C, O, E, D, F). Chứng minh rằng:

a) E và F chia trong và chia ngoài đoạn CD theo cùng một tỉ số;

b) AD và AC là các phân giác trong và ngoài của góc EAF.

Scanned with CamScanner

58. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC. Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I. Đặt AB = c, AC = b, BC = a.

a) Tính $\frac{IB}{IC}$ theo b và c.

b) Tính IA, IC, biết rằng AB = 20 cm, AC = 28 cm, BC = 24 cm.

c) Tính IA, IC theo a, b, c.

59. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC. Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I. Tia phân giác góc BAC cắt BC ở D.

a) Chứng minh rằng IA = ID.

b) Tính IA biết DB = 2 cm, DB = 3 cm.

c) Đặt DB = m, DC = n. Chứng minh rằng $\frac{1}{IA} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$.

60. Cho hình vuông ABCD có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4 cm.

61. Cho hình bình hành ABCD, $\widehat{A} \leq 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

62. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cạnh BC sao cho BM = 3MC. Vẽ dây AD cắt BC tại điểm E nằm giữa B và M. Tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE tại E cắt AC ở F và cắt AB ở G. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AEF \backsim \Delta BMD$ và $\Delta AEG \backsim \Delta CMD$;

b) EG = 3EF.

63*. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CC' (C ∈ (O), C' ∈ (O')), kẻ đường kính COD. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với C'D, CC'. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO').

b) FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'.

64*. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau ở A và B, trong đó tiếp tuyến chung CD song song với cát tuyến chung EBF, C và E thuộc (O), D và F thuộc (O'), B nằm giữa E và F. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của DA, CA với EF. Gọi I là giao điểm của EC và FD. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ICD = \Delta BCD$. b) IB là đường trung trực của MN.

65*. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. Gọi D là trung điểm của AB, E là trung điểm của AC. Gọi K là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác tam giác BDH và CEH. Chứng minh rằng HK đi qua trung điểm của DE.

~ **Ví dụ:** 57, 62.

Bài tập: 285, 286, 289, 292, 293, 311, 313, 323.

Scanned with CamScanner

§3. CUNG CHỨA GÓC

Cung chứa góc α ($0^o < \alpha < 180^o$) vẽ trên đoạn thẳng AB là cung mà mọi góc ACB có đỉnh C thuộc cung đó đều có số đo bằng α.

Áp dụng cung chứa góc vào chứng minh: Nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α thì bốn đỉnh của tứ giác ấy thuộc cùng một đường tròn.

Áp dụng cung chứa góc vào các bài toán quỹ tích và dựng hình: Xem các chuyên đề *Quỹ tích, Dựng hình.*

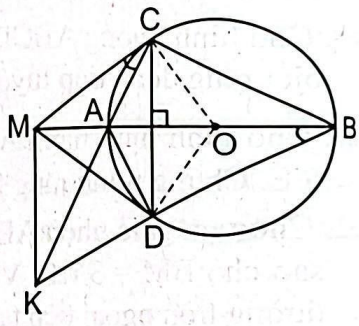
Ví dụ 18. Từ điểm M ở bên ngoài đường tròn tâm O, kẻ cát tuyến MAB đi qua O và các tiếp tuyến MC, MD. Gọi K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, C, M, K thuộc cùng một đường tròn.

b) MK vuông góc với AB.

Giải. (h.25) a) Dễ dàng chứng minh AB ⊥ CD nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$, do đó $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), tức là $\widehat{KCM} = \widehat{KBM}$.

Tứ giác BCMK có các đỉnh B và C cùng nhìn KM dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm B, C, M, K thuộc cùng một đường tròn.



Hình 25

b) Từ câu a suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{BCK} = 90^o$. Vậy KM ⊥ AB.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O, I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB, AHC. Trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho CD = CA và BE = BA. Chứng minh rằng:

a) Các điểm A, I, D thẳng hàng; các điểm A, K, E thẳng hàng;

b) Tam giác ODE vuông cân;

c) Các điểm D, I, O, K, E thuộc cùng một đường tròn.

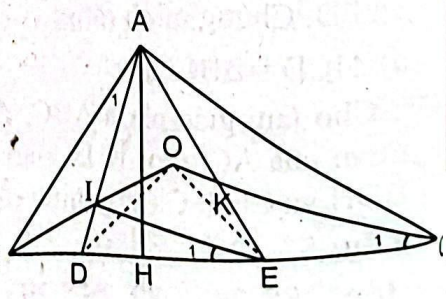
Giải. (h.26) a) ΔACD cân tại C $\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^o - \dfrac{\hat{C}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^o - \widehat{CAD} = 90^o - \left(90^o - \dfrac{\hat{C}}{2}\right)$

$= \dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAH}$

$\Rightarrow$ AD là tia phân giác của góc BAH $\Rightarrow$ AD đi qua I.

Tương tự AK đi qua E.



Hình 26

b) CO là trục đối xứng của ΔACD cân nên OA = OD.

Scanned with CamScanner

67. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} > 90^o$, điểm I thuộc cạnh AB, điểm K thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{ADI} = \widehat{CDK}$ và AI < IB, CK < KB. Lấy điểm E thuộc cạnh BA sao cho BE = AI. Lấy điểm F thuộc cạnh BC sao cho BF = CK. Chứng minh rằng bốn điểm A, E, F, C thuộc cùng một đường tròn.

68. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh bên, cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với DE. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

69. Cho hình thang ABCD (AB // CD), O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia OA lấy điểm M sao cho OM = OB. Trên tia OB lấy điểm N sao cho ON = OA. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm D, M, N, C thuộc cùng một đường tròn;

b) $\widehat{ACN} = \widehat{BDM}$.

70. Cho tam giác ABC (AC > AB). Các tia phân giác của các góc A và C cắt nhau ở I. Gọi D, E là hình chiếu của I trên AB, AC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, BC. Gọi K là giao điểm của MN và AI. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm I, E, K, C thuộc cùng một đường tròn;

b) Ba điểm D, E, K thẳng hàng.

71. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} > 90^o$). Đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B, tiếp xúc với AC tại C. Gọi D là trung điểm của AB, K là giao điểm thứ hai của CD với đường tròn, I là trung điểm của OA. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, I, K, D thuộc cùng một đường tròn;

b) $\widehat{BKI} = 90^o$.

72. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMC, BMD. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng I thuộc các đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC, BMD.

b) Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai đường tròn trên. OO' cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng các tam giác IME, IMF là tam giác đều và CE song song với DF.

73*. Cho tam giác ABC, đường cao AH, đường trung tuyến AM (H, M phân biệt và thuộc cạnh BC) thoả mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^o$.

~ **Ví dụ:** 49, 51, 54 đến 56, 61.

Bài tập: 240 đến 244, 246 đến 252, 256, 260 đến 266, 270, 271, 277, 280, 285 đến 290, 293 đến 296, 324 đến 322.

Scanned with CamScanner

§4. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

Trong một tứ giác nội tiếp, hai góc đối bù nhau.

Đảo lại, nếu một tứ giác có hai góc đối bù nhau thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn

Một tứ giác cũng nội tiếp được đường tròn nếu:

- Có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện;
- Có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau.

Ta cũng có các bổ đề sau: Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại I, các điểm A và B thuộc d, các điểm C và D thuộc d'.

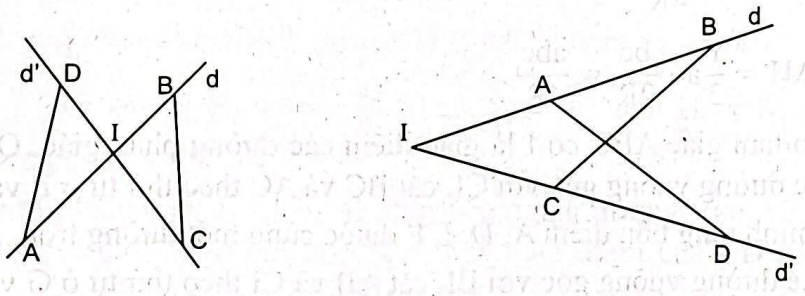
Bổ đề 1. Nếu bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn thì $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

Bổ đề 2. Nếu $IA \cdot IB = IC \cdot ID$ thì bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.

Bổ đề 1 là một tính chất của tứ giác nội tiếp.

Bổ đề 2 cho ta một dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề 1. Chứng minh bổ đề 2 như sau (h.28).



Hình 28

Ta có $IA \cdot IB = IC \cdot ID$ nên $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{ID}{IB}$.

Ta lại có $\widehat{AID} = \widehat{BIC}$ nên $\Delta IDA \backsim \Delta IBC$ (g.g), do đó $\widehat{IDA} = \widehat{IBC}$ tức là $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

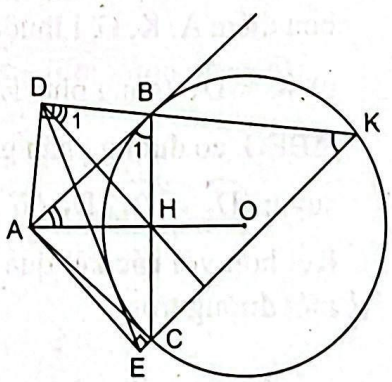
Vậy A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn (theo cung chứa góc).

Ví dụ 21. Cho đường tròn (O) và các tiếp tuyến AB, AC kẻ từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi K là điểm thuộc cung lớn BC, D và E là hình chiếu của A trên KB và KC. Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác KDE.

Giải. (h.29) Ta có ΔABC cân tại A nên $AH \perp BC$. Tứ giác ADBH có $\widehat{D} + \widehat{H} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$.

Ta có $\widehat{K} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

Suy ra $\widehat{D_1} + \widehat{K} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ$, do đó $DH \perp KE$.



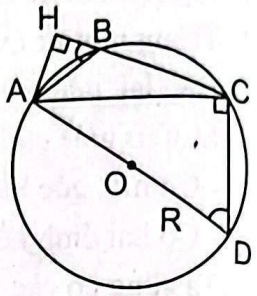
Hình 29

Scanned with CamScanner

Tương tự $EH \perp KD$. Vậy H là trực tâm của ΔKDE.

Ví dụ 22. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có AB = 8 cm, AC = 15 cm, đường cao AH = 5 cm (điểm H nằm ngoài cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

Giải. (h.30) Kẻ đường kính AD. Ta có ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Ta lại có $\widehat{ABH} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$.



Hình 30

$\Delta ABH \backsim \Delta ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{15} = \frac{8}{2R} \Rightarrow R = 12 \text{ (cm)}.$$

Chú ý: Nếu điểm H nằm trên cạnh BC, ta vẫn có R = 12 cm (xem Ví dụ 5).

Từ Ví dụ 6 và Ví dụ 22, ta có: Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R có đường cao AH thì $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$. Do đó $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{2R}$.

Từ đây suy ra $S = \dfrac{abc}{4R}$ với S là diện tích tam giác có cạnh a, b, c. Thật vậy

$$S = \frac{1}{2}a \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot \frac{bc}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC có I là giao điểm các đường phân giác. Qua điểm D thuộc đoạn BI, kẻ đường vuông góc với CI, cắt BC và AC theo thứ tự ở E và F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, I, F thuộc cùng một đường tròn.

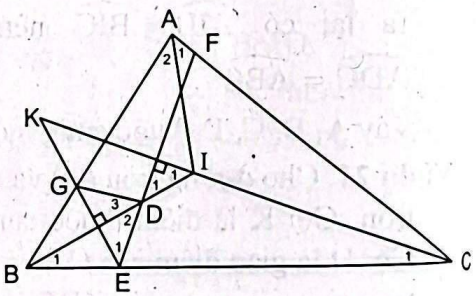
b) Qua E kẻ đường vuông góc với BI, cắt AB và CI theo thứ tự ở G và K. Chứng minh rằng bốn điểm A, K, G, I thuộc cùng một đường tròn.

c) Chứng minh rằng sau điểm A, K, G, D, I, F thuộc cùng một đường tròn.

Giải. (h.31)

a) $\widehat{D_1} = 90^\circ - \widehat{I_1} = 90^\circ - \left(\widehat{B_1} + \widehat{C_1}\right) = \widehat{A_1}$.

Suy ra bốn điểm A, D, I, F thuộc cùng một đường tròn.



Hình 31

b) $\widehat{K} = 90^\circ - \widehat{I_1} = 90^\circ - \left(\widehat{B_1} + \widehat{C_1}\right) = \widehat{A_2}$. Suy ra bốn điểm A, K, G, I thuộc cùng một đường tròn.

c) $\widehat{K} = \widehat{D_2}$ (cùng phụ $\widehat{E_1}$).

ΔBEG có đường phân giác BD vuông góc với EG nên BD là đường trung trực của EG, suy ra $\widehat{D_2} = \widehat{D_3}$. Do đó $\widehat{K} = \widehat{D_3}$ nên KGDI là tứ giác nội tiếp.

Kết hợp với các kết quả ở các câu a và b suy ra sáu điểm K, G, D, I, A, F thuộc cùng một đường tròn.

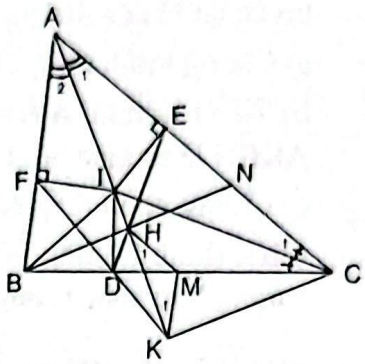
Scanned with CamScanner

Ví dụ 24. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), I là giao điểm của ba đường phân giác. Gọi D, E, F là hình chiếu của I trên BC, AC, AB. Gọi H, K là giao điểm của AI với DE, DF.

a) Chứng minh rằng ICKD và IBHD là các tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng

$$MH = MK.$$



Hình 32

Giải. (h.32) a) $\widehat{KIC}$ là góc ngoài của ΔAIC nên

$\widehat{KIC} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1}$. (1)

ΔBDF cân ở B nên

$$\widehat{KDC} = \widehat{BDF} = 90^o - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KIC} = \widehat{KDC}$ nên tứ giác ICKD nội tiếp.

Tương tự, tứ giác IBHD nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của BH và AC.

ΔABN có đường phân giác AH là đường cao nên là tam giác cân, suy ra BH = HN.

MH là đường trung bình của ΔBCN nên MH // AC, suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{A_1}$.

Tương tự MK // AB suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{A_2}$. Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{K_1}$.

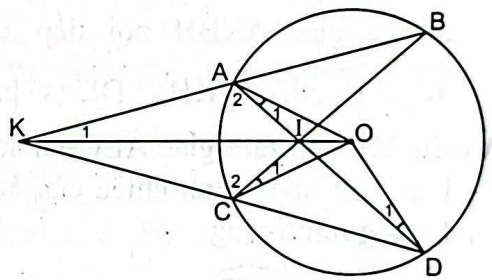
Suy ra ΔMHK cân và MH = MK.

Ví dụ 25. Cho đường tròn (O). Từ điểm K nằm bên ngoài đường tròn, vẽ hai cát tuyến KAB và KCD đối xứng nhau qua KO. Gọi I là giao điểm của AD và OK. Chứng minh rằng:

a) CIOD là tứ giác nội tiếp;

b) KAOD là tứ giác nội tiếp;

c) $\widehat{AKI} = \widehat{ICO}$.



Hình 33

Giải. (h.33) a) $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (ΔOAD cân)

$\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (đối xứng qua KO)

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ nên tứ giác CIOD nội tiếp (theo cung chứa góc).

b) CIOD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IOD} = \widehat{C_2}$. Ta lại có $\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$ (đối xứng qua KO).

Suy ra $\widehat{IOD} = \widehat{A_2}$, tức là $\widehat{KOD} = \widehat{A_2}$.

Do đó tứ giác KAOD nội tiếp (theo cung chứa góc).

c) KAOD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{K_1} = \widehat{D_1}$.

CIOD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$. Suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{C_1}$.

Scanned with CamScanner

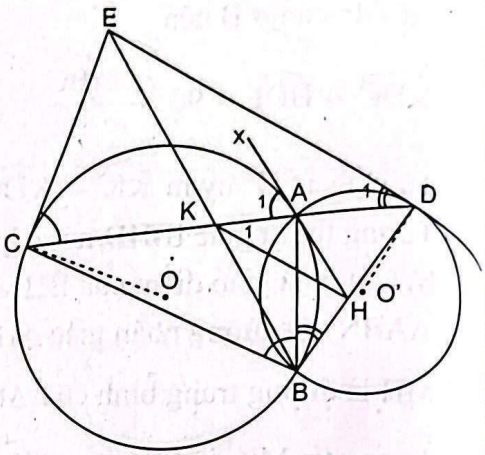
Ví dụ 26. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ cát tuyến chung CAD, $C \in (O)$, $D \in (O')$, A nằm giữa C và D. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) và tiếp tuyến tại D của đường tròn (O') cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng ECBD là tứ giác nội tiếp.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BD ở H, EB cắt CD ở K. Chứng minh rằng AKBH là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng KH song song với DE.

Giải. (hình 34 ứng với K nằm giữa C và A, các trường hợp khác tương tự)



Hình 34

a) $\widehat{ABC} = \widehat{C_1}$ (bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$)

$\widehat{ABD} = \widehat{D_1}$ (bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AD}$).

Suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = \widehat{C_1} + \widehat{D_1}$.

Do đó $\widehat{CED} + \widehat{CBD} = \widehat{CED} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 180^o$.

Vậy ECBD là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác ECBD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{C_1}$ tức là $\widehat{KBH} = \widehat{C_1}$.

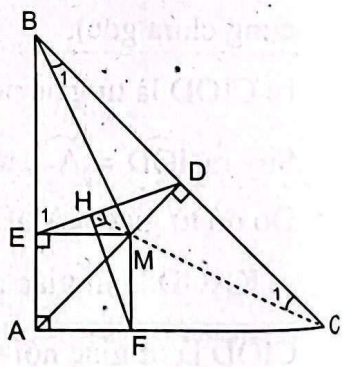
Gọi Ax là tia đối của AH, ta có Ax là tia tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$. Suy ra $\widehat{KBH} = \widehat{A_1}$, do đó AKBH là tứ giác nội tiếp.

c) Tứ giác AKBH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{ABH}$. Ta lại có $\widehat{ABH} = \widehat{ABD} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{K_1} = \widehat{D_1}$, do đó KH // DE (vì hai góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 27. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm M thuộc đường cao AD. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Gọi H là hình chiếu của F trên DE. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{MED} = \widehat{MCD}$; b) Ba điểm H, M, C thẳng hàng.

Giải. (h.35) a) Tứ giác BEMD có $\widehat{MEB} = \widehat{MDB} = 90^o$ nên nội tiếp đường tròn đường kính MB, suy ra $\widehat{MED} = \widehat{B_1}$.



Hình 35

ΔMBC cân nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Vậy $\widehat{MED} = \widehat{C_1}$.

b) Ta sẽ chứng minh $\widehat{AMH} + \widehat{AMC} = 180^o$.

Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{EMF} = \widehat{EHF} = 90^o$ nên A, M, H nằm trên đường tròn đường kính EF.

Scanned with CamScanner

Tứ giác AEHM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{E_1}$.

Ta lại có $\widehat{E_1} = 90^o - \widehat{MED}$ nên theo câu a ta có $\widehat{AMH} = 90^o - \widehat{C_1}$. (1)

$\widehat{AMC}$ là góc ngoài của ΔMCD nên $\widehat{AMC} = 90^o + \widehat{C_1}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMH} + \widehat{AMC} = \left(90^o - \widehat{C_1}\right) + \left(90^o + \widehat{C_1}\right) = 180^o$.

Vậy ba điểm H, M, C thẳng hàng.

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm G thuộc cạnh AC sao cho $AG = \frac{1}{3}AC$. Trên BG lấy điểm I sao cho $\widehat{BCI} = \widehat{ABG}$.

Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^o$.

Giải. (h.36)

Vẽ K đối xứng với B qua A thì $\widehat{BCK} = 90^o$.

Tam giác BCK có CA là đường trung tuyến và $AG = \frac{1}{3}AC$ nên G là trọng tâm, do đó BG cắt CK tại trung điểm M.

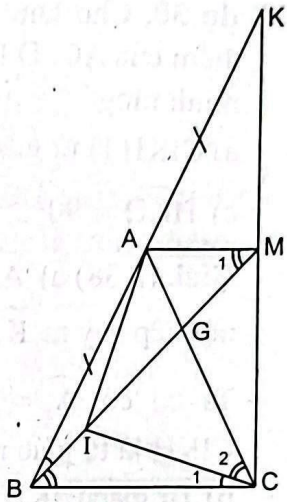
AM là đường trung bình của ΔBCK

$\Rightarrow AM // BC \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{M_1}$.

Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ nên $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$.

Suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{M_1}$, do đó AMCI là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có $\widehat{AMC} = 90^o$ nên $\widehat{AIC} = 90^o$.



Hình 36

Ví dụ 29. Cho điểm B thuộc đoạn thẳng AC. Vẽ về một phía của AC các hình vuông ABDE và BCFG. Gọi I là tâm của hình vuông BCFG, K là giao điểm của AI và CE.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = 90^o$.

b) Chứng minh rằng KA là tia phân giác của góc BKE.

c) Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của CE và AI. Hãy nhận xét về dạng của tứ giác BKMN.

Giải. (h.37) a) ΔEBC và ΔABI có

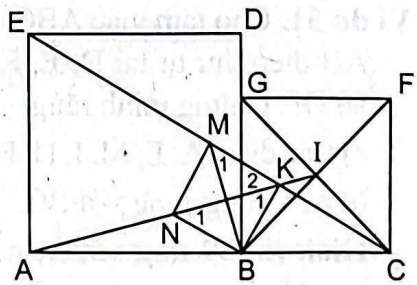
$\widehat{EBC} = \widehat{ABI} = 135^o$

$\frac{EB}{AB} = \frac{BC}{BI}$ (bằng $\sqrt{2}$)

nên $\Delta EBC \backsim \Delta ABI$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{BIA}$, do đó tứ giác BKIC nội tiếp.

Vậy $\widehat{BKC} = \widehat{BIC} = 90^o$.



Hình 38

Scanned with CamScanner

b) $\widehat{BKE} = \widehat{BAE} = \widehat{BDE} = 90^o$ nên A, B, K, D, E thuộc cùng một đường tròn.

Do AB = AE nên $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$.

c) $\Delta EBC \backsim \Delta ABC$, BM và BN là các đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$.

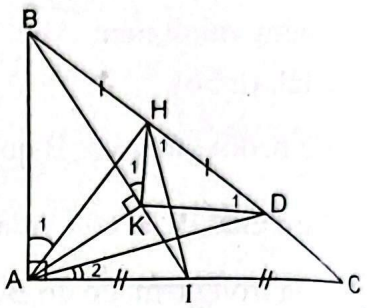
Suy ra BKMN là tứ giác nội tiếp. Ta lại có $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$ nên NB = NM.

Vậy BKMN là tứ giác nội tiếp có $\widehat{K} = \widehat{N} = 90^o$ và NB = NM.

Ví dụ 30. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, D là điểm đối xứng với B qua H, K là hình chiếu của A trên BI. Chứng minh rằng:

a) CIKH là tứ giác nội tiếp; b) AKDC là tứ giác nội tiếp;

c) $\widehat{HKD} = 90^o$.



Hình 38

Giải. (h.38) a) $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90^o$ nên ABHK là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{A_1}$.

Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ (cùng phụ $\widehat{B}$) nên $\widehat{K_1} = \widehat{C}$, suy ra CIKH là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác CIKH nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{H_1} = \alpha \Rightarrow \widehat{AKC} = 90^o + \alpha$ (1)

ΔAHC có HI là đường trung tuyến $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{H_1} = \alpha$.

$\widehat{HAD} = \widehat{A_1} = \widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^o + \widehat{HAD} = 90^o + \alpha$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKC} = \widehat{ADC}$ nên AKDC là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc).

c) Ta sẽ chứng minh $\widehat{KHD} + \widehat{D_1} = 90^o$.

Tứ giác ABHK nội tiếp nên $\widehat{KHD} = \widehat{BAK}$.

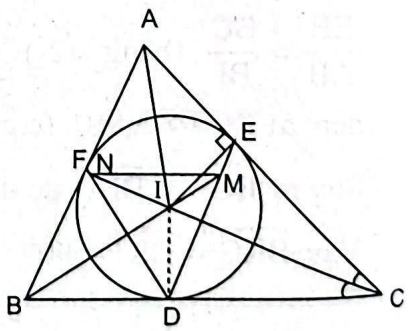
Tứ giác AKDC nội tiếp nên $\widehat{D_1} = \widehat{KAC}$.

Do đó $\widehat{KHD} + \widehat{D_1} = \widehat{BAK} + \widehat{KAC} = \widehat{BAC} = 90^o$. Vậy $\widehat{HKD} = 90^o$.

Ví dụ 31. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB theo thứ tự tại D, E, F. Gọi M là giao điểm của BI và DE, N là giao điểm của CI và DF. Chứng minh rằng:

a) Các điểm A, E, M, I, N, F thuộc cùng một đường tròn;

b) MN song song với BC.



Hình 39

Giải. (h. 39 ứng với M nằm giữa D và E, các trường hợp khác tương tự)

a) ΔCDE cân tại C nên $\widehat{AED} = 90^o + \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Scanned with CamScanner

Ta lại có $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$ nên $\widehat{AIB} = \widehat{AEB}$

$\Rightarrow$ AEMI là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ E và M thuộc đường tròn đường kính AI.

Chứng minh tương tự, F và N thuộc đường tròn đường kính AI.

Vậy các điểm A, E, M, I, N, F thuộc cùng một đường tròn.

b) Từ câu a, suy ra $\widehat{INM} = \widehat{IEM}$.

IECD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IED} = \widehat{ICD} \Rightarrow \widehat{IEM} = \widehat{ICD}$.

Suy ra $\widehat{INM} = \widehat{ICD}$, hai góc này so le trong nên MN // BC.

Ví dụ 32. Cho điểm A nằm trên đoạn thẳng BC. Vẽ về một phía của BC các tam giác đều ABD, ACE. Gọi I là giao điểm của BE và CD, H và K theo thứ tự là trung điểm của BE và CD.

a) Chứng minh rằng ABDI là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc BIC.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Tính các góc của tam giác MHK.

d) Chứng minh rằng IA vuông góc với HK.

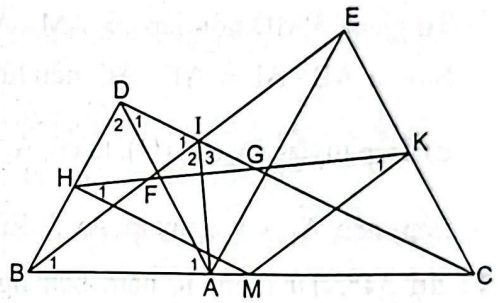
Giải. (h.40) a) ΔBAE và ΔDAC có AB = AD;

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (bằng $60^\circ + \widehat{DAE}$);

AE = AC nên $\Delta BAE = \Delta DAC$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$.

Vậy ABDI là tứ giác nội tiếp.



Hình 40

b) ABDI là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{I_1} = \widehat{A_1} = 60^\circ$, $\widehat{I_2} = \widehat{D_2} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{I_3} = 60^\circ$. Vậy AI là tia phân giác của góc BIC.

c) MH là đường trung bình của ΔBDC nên $MH = \frac{CD}{2}$.

MK là đường trung bình của ΔBCE nên $MK = \frac{BE}{2}$.

Ta lại có CD = BE (vì $\Delta DAC = \Delta BAE$). Do đó MH = MK.

Tam giác MHK cân có $\widehat{M} = \widehat{BIC} = 120^\circ$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{K_1} = 30^\circ$.

d) Gọi F, G là giao điểm của HK với BE, CD.

Do MH // CD nên $\widehat{IGF} = \widehat{H_1} = 30^\circ$. Do MK // BE nên $\widehat{IFG} = \widehat{K_1} = 30^\circ$.

Tam giác IFG cân, lại có IA là tia phân giác của góc FIG (câu b) nên IA $\perp$ HK.

Lưu ý. Các câu a, b, c là gợi ý để giải câu d.

Với cách giải trên, bạn đọc tự giải bài toán sau:

Scanned with CamScanner

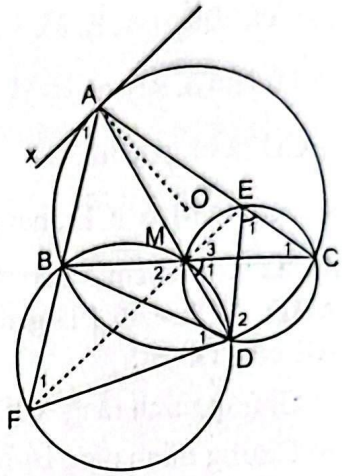
Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 120^\circ$. Ở phía ngoài tam giác, vẽ các tam giác đều ABD, ACE. Gọi I là giao điểm của BE và CD, H và K theo thứ tự là trung điểm của BD và CE. Chứng minh rằng IA vuông góc với HK.

Ví dụ 33. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường trung tuyến AM cắt đường tròn ở D. Đường tròn đi qua B, M, D cắt AB ở F. Đường tròn đi qua C, M, D cắt AC ở E. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm E, M, F thẳng hàng;

b) BECF là tứ giác nội tiếp;

c) OA vuông góc với EF.



Hình 41

Giải. (h.41) a) $\overset{\frown}{BFD} = \overset{\frown}{M_1}$ (cùng bù $\overset{\frown}{BMD}$)

$= \overset{\frown}{E_1}$ (góc nội tiếp) (1)

$\overset{\frown}{DCE} = \overset{\frown}{B_1}$ (cùng bù $\overset{\frown}{ABD}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên $\overset{\frown}{M_2} = \overset{\frown}{M_3}$.

Từ đó chứng minh được E, M, F thẳng hàng.

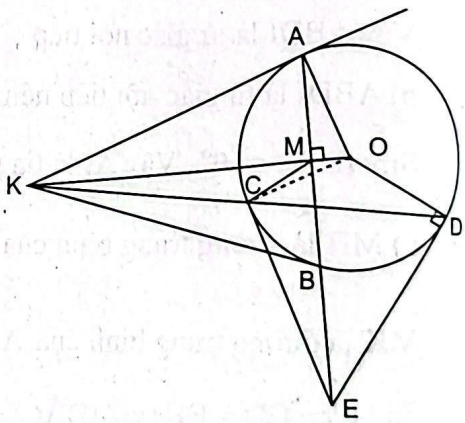
b) Tứ giác BMDF nội tiếp $\Rightarrow AB \cdot AF = AM \cdot AD$.

Tứ giác CEMD nội tiếp $\Rightarrow AM \cdot AD = AE \cdot AC$.

Suy ra $AB \cdot AF = AE \cdot AC$ nên tứ giác BECF nội tiếp.

d) Tiếp tuyến Ax của (O), ta có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$), $\widehat{C_1} = \widehat{F_1}$ (tứ giác BECF nội tiếp) nên $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}$, suy ra Ax // EF. Ta lại có Ax ⊥ OA nên OA ⊥ EF.

Ví dụ 34*. Từ điểm K nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD với đường tròn. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt AB ở E. Chứng minh rằng EC là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 42

Giải. (h.42) KA là tiếp tuyến, KCD là cát tuyến nên $KA^2 = KC \cdot KD$.

Gọi M là giao điểm của AB và OK. ΔOAK vuông có AM là đường cao nên

$$KA^2 = KM \cdot KO.$$

Suy ra $KM \cdot KO = KC \cdot KD$, từ đó CMOD là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác EMOD có $\widehat{M} + \widehat{D} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp.

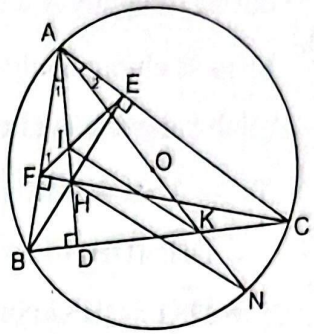
Các điểm C và E cùng thuộc đường tròn đi qua M, O, D nên năm điểm C, E, M, O, D thuộc cùng một đường tròn.

Suy ra $\overset{\frown}{OCE} = \overset{\frown}{OME} = 90^\circ$. Vậy EC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Scanned with CamScanner

Ví dụ 35. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC, các đường cao BE và CF cắt nhau ở H. Gọi I là giao điểm của EF và AH. Vẽ đường kính AN cắt BC ở K. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AFI \backsim \Delta ACK$; b) IK song song với HN.



Hình 43

Giải. (h.43) a) Tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{F_1}$.

Do đó $\Delta AFI \backsim \Delta ACK$ (g.g).

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Ta có $\widehat{A_1}$ phụ $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_2}$ phụ $\widehat{ANC}$, mà $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

$\Delta AFH \backsim \Delta ACN$ (g.g) nên $\dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AF}{AC}$. (1)

Từ câu a suy ra $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{AF}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2) sùy ra $\dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AI}{AK}$ nên $\dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AK}{AN}$, do đó IK // HN (định lí Thalès đảo).

Ví dụ 36*. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của EF và BC.

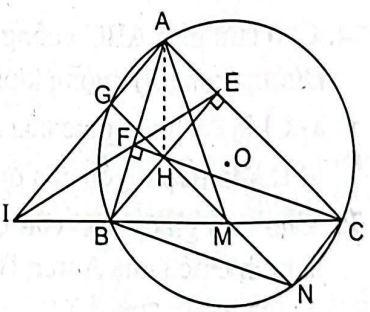
a) Gọi G là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O). Chứng minh rằng AGFE là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác AIM.

Giải. (h.44) a) Xét điểm I và đường tròn (O) ta có $IG \cdot IA = IB \cdot IC$ (1)

Do $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn đường kính BC, ta có $IB \cdot IC = IF \cdot IE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IG \cdot IA = IF \cdot IE$, do đó AGFE là tứ giác nội tiếp.



Hình 44

b) Ta có tứ giác AFHE nội tiếp và tứ giác AGFE nội tiếp nên năm điểm A, G, F, H, E thuộc cùng một đường tròn. Suy ra $\widehat{AGH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$.

Gọi N là giao điểm của GH với (O) thì $\widehat{ACN} = 90^\circ$, $\widehat{ABN} = 90^\circ$.

Ta có BH // CN (cùng vuông góc với AC),

CH // BN (cùng vuông góc với AB)

nên BHCN là hình bình hành, suy ra HN đi qua M.

Tam giác AIM có MG ⊥ AI, AH ⊥ IM nên H là trực tâm.

Nhận xét. Khai thác kết quả của bài toán trên, ta có thêm nhiều bài toán mới.

Bài toán 1. a) Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\widehat{ANE} = \widehat{AMB}$.

b) Gọi K là hình chiếu của H trên EF. Chứng minh rằng AN song song với DK.

Scanned with CamScanner

Giải. (h.45)

a) Ta có $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g.g), AN và AM là các đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{ANE} = \widehat{AMB}$.

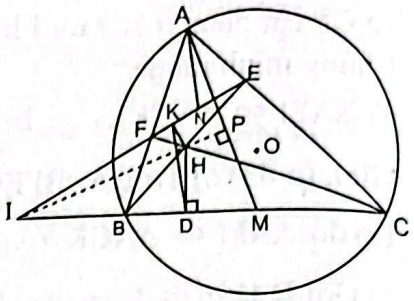
b) Ta sẽ chứng minh $\widehat{ANK} = \widehat{DKN}$ bằng cách chứng minh hai góc bù với chúng bằng nhau $\widehat{ANE} = \widehat{DKI}$.

Ta có $\widehat{ANE} = \widehat{AMB}$ (câu a)

$= \widehat{DHI}$ (DHPM nội tiếp, IH ⊥ AM tại P)

$= \widehat{DKI}$ (DHKI nội tiếp).

Suy ra $\widehat{ANK} = \widehat{DKN}$, do đó AN // DK.



Hình 45

Bài toán 2. Ta cũng có kết quả sau: Đường vuông góc với BE tại B cắt AI và AD ở P và Q. Chứng minh rằng BP = BQ.

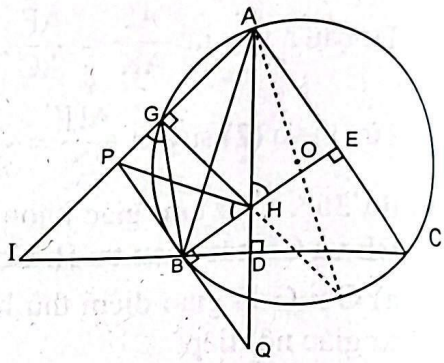
Giải. (h.46) $\widehat{BHP} = \widehat{BGP}$ (tứ giác BHGP nội tiếp)

$= \widehat{ACB}$ (tứ giác AGBC nội tiếp)

$= \widehat{AHE}$ (tứ giác CDHE nội tiếp)

$= \widehat{BHQ}$ (đối đỉnh).

Do đó ΔHPQ cân, suy ra BP = BQ.



Hình 46

BÀI TẬP

74. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC. Lấy điểm I thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABI} = \hat{C}$. Đường tròn (O) đường kính IC cắt BI ở D và cắt BC ở M. Chứng minh rằng:

a) CI là tia phân giác của góc DCM;

b) DA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

75. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung AC. Gọi H là hình chiếu của A trên BD, E là điểm đối xứng với D qua H. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ADC} = \widehat{AEB}$; b) BE = CD.

76. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao CH. Gọi K là hình chiếu của B trên OC. Chứng minh rằng HK vuông góc với AC.

77. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC, đường kính DE vuông góc với BC (D thuộc cung lớn BC). Gọi M là giao điểm của AD và BE, N là giao điểm của AC và DE. Chứng minh rằng:

a) AMND là tứ giác nội tiếp; b) MN song song với BC.

78. Cho tam giác ABC có I là giao điểm của các đường phân giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AC, AB. DE và DF cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M và N. Gọi K là giao điểm của MF và NE. Chứng minh rằng:

Scanned with CamScanner

a) EF song song với MN; b) $\Delta AFN \backsim \Delta AME$;

c) AKFN là tứ giác nội tiếp; d) DEKF là tứ giác nội tiếp.

79. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC, đường kính AD. Tiếp tuyến với đường tròn D cắt BC ở K. Đường thẳng KO cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng OM = ON.

80. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC, đường kính DE vuông góc với BC tại I (D thuộc cung lớn BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AID cắt AB, AC theo thứ tự ở K, H. Chứng minh rằng:

a) IH // EC và IK // EB; b) BK = CH.

81. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), điểm K thuộc tia đối của tia AB, KC cắt đường tròn (O) ở D. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt DA ở E. Chứng minh rằng:

a) BDKE là tứ giác nội tiếp; b) EB = EK.

82. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của đường cao AH. Đường tròn (O) đường kính BH cắt BA và BM theo thứ tự ở D và I. Chứng minh rằng:

a) ADIM là tứ giác nội tiếp;

b) DM là tiếp tuyến của đường tròn (O);

c) AIHC là tứ giác nội tiếp và tính góc AIC.

83. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là trung điểm của BC, D là điểm nằm giữa I và C. Gọi E, F theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng E và F nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AID.

84. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Vẽ các đường tròn (D), (E) đường kính AB, AC. Đoạn DE cắt đường tròn (D) ở K, AK cắt đường tròn (E) ở M.

a) Chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc HAC.

b) Gọi I là trung điểm của KM. Chứng minh rằng $\widehat{DIE} = 90^o$.

85. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, đường phân giác AD. Gọi H, K theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng OH = OK.

86. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} > 90^o$) nội tiếp đường tròn (O), I là giao điểm các đường phân giác. Qua I kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở K. Chứng minh rằng:

a) OIKC là tứ giác nội tiếp; b) OK vuông góc với IC.

87. Cho đường tròn (O,R), điểm K nằm bên ngoài đường tròn (OK > 2R), M là trung điểm của OK. Kẻ các tiếp tuyến KA, KB. Gọi N là trung điểm của KA, I là giao điểm của BN và đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{AIM} = 90^o$.

88. Cho hình bình hành ABCD, các điểm E và F thuộc cạnh AB (AE < AF). Gọi I là giao điểm của CE và DF. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác AEI và BFI cắt nhau ở điểm thứ hai H. Chứng minh rằng IH song song với AD.

Scanned with CamScanner

89. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), đường phân giác AD. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. Đường vuông góc với BC tại D cắt EF ở I.

a) Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC theo thứ tự ở H và K. Chứng minh rằng AHDK là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng MB = MC.

90. Cho tam giác ABC nội tiếp đườngt ròn (O), AB < AC, tia phân giác của góc A cắt đường tròn ở D. Qua trung điểm M của BC, kẻ đường thẳng song song với DA, cắt cung AC ở I. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của DI với AB, AC.

a) Vẽ K đối xứng với B qua I. Chứng minh rằng KIFC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng IE = IF.

91. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn ở M. Tia phân giác của góc C cắt AD ở I. Gọi H là hình chiếu của I trên BC, E là giao điểm của MH là đường tròn (O), K là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng:

a) AEHD là tứ giác nội tiếp; b) $\overset{\frown}{AEI} = 90^o$; c) $\overset{\frown}{KID} = 90^o$.

92. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), AO cắt đường tròn ở D. Vẽ dây DE cắt BC ở M (MB < MC). Đường trung trực của ME cắt BE, AB, AC theo thứ tự ở H, I, K. Chứng minh rằng:

a) BHKC, BHIM là các tứ giác nội tiếp; b) AEIK là hình thang cân; c) MI = AK.

93. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ đường tròn (O) đường kính AC, cắt BC ở H. Gọi N là điểm chính giữa của cung AC không chứa H, BN cắt đường tròn (O) ở K. Chứng minh rằng:

a) DIKH là tứ giác nội tiếp; b) AI = ID; c) $\overset{\frown}{IDH} = \overset{\frown}{IKD}$.

94. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC. Lấy điểm K thuộc cạnh AB sao cho $\overset{\frown}{ABK} = \hat{C}$, lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho $\overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{CBK}$. Gọi E là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

a) BDE là tam giác cân;

b) CE = 2AD (*Hướng dẫn:* Kẻ CH vuông góc với BK).

95*. Cho tam giác ABC (AB < AC), I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AB, AC. Gọi K là hình chiếu của I trên AD. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD, cắt KE ở M. Qua C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt KF ở N. Chứng minh rằng:

a) $\frac{BM}{CN} = \frac{BE}{CF}$; b) A, E, K, I, F thuộc cùng một đường tròn;

c) $\Delta KMB \backsim \Delta KNC$; d) KD là tia phân giác của góc BKC.

96. Cho tam giác nhọn ABC (AB > AC) nội tiếp đường tròn (IO) đường cao AH. Gọi E là hình chiếu của B trên đường thẳng OA, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ΔMEH là tam giác cân.

Scanned with CamScanner

97. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, M là trung điểm của BC, D là điểm nằm bên trong tam giác ABC sao cho BD = BA.

a) Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng HIDM là tứ giác nội tiếp.

b) Đường vuông góc với MD tại D cắt AH ở E. Chứng minh rằng IE vuông góc với CD.

98. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi P, Q theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB, AHC. Đường thẳng PQ cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E.

a) Chứng minh rằng ADE là tam giác vuông cân.

b) Chứng minh rằng BDPH và HQEC là các tứ giác nội tiếp.

c) Tính góc DHE.

99*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (P) , (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB và AHC. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của hai đường tròn (P) và (Q), nó cắt AB, AH, AC theo thứ tự ở M, K, N. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác HPQ và ABC đồng dạng; b) KP // AB, KQ // AC;

c) BMNC là tứ giác nội tiếp;

d) Năm điểm A, M, P, Q, N thuộc cùng một đường tròn;

100. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F là các tiếp điểm trên BC, AC, AB. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với DF cắt BC ở M. Đường thẳng đi qua F và vuông góc với DE cắt BC ở N. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, M, N thuộc cùng một đường tròn..

101. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R), I là điểm bất kì nằm bên trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AC, AB. Gọi S, S' theo thứ tự là diện tích các tam giác ABC, DEF. Gọi K là giao điểm của AI với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $S' = \frac{1}{2}IA \cdot IK \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$; b) $\frac{S'}{S} = \frac{1}{4} - \left(\frac{OI}{2R}\right)^2$.

Hướng dẫn. Sử dụng kết quả của các Ví dụ 6b và 8c.

102. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB, AHC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIK. Chứng minh rằng ba điểm A, O, H thẳng hàng.

103. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD, trực tâm H. Gọi AM, AN là các tiếp tuyến với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng:

a) AMDN là tứ giác nội tiếp; b) Ba điểm M, H, N thẳng hàng.

104. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), các đường cao BD và CE cắt nhau ở H, M là trung điểm của BC. Gọi K là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBE và MCD. Chứng minh rằng:

a) Các điểm B, H, K, C thuộc cùng một đường tròn; b) $\widehat{HKM} = 90^\circ$.

Scanned with CamScanner

105. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE. Lấy điểm K thuộc tia đối của tia BD. KC cắt đường tròn (O) ở G, GB cắt CE ở I. Gọi M là giao điểm của DE và IK. Chứng minh rằng MI = MK.

106. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R), $\widehat{A} = 45^o$, các đường cao BD và CE. Tính độ dài DE theo R.

107. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là điểm nằm giữa D và C. Đường tròn đi qua B, F, K cắt AK ở I. Chứng minh rằng:

a) E, I, K, C thuộc cùng một đường tròn; b) HI vuông góc với AK.

108. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên EF. Chứng minh rằng DE + DF = IK.

109. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi giao điểm của AH với đường tròn là I, giao điểm của IE với đường tròn là K, giao điểm của DE với đường tròn là M. Chứng minh rằng M là trung điểm của DE.

110. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF. Tia EF cắt đường tròn (O) ở I. Gọi K là giao điểm của DE và CI. Chứng minh rằng:

a) AEIK là tứ giác nội tiếp; b) AI = AK.

111. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Qua D kẻ đường thẳng song song với EF, cắt AB và CF theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng DM = DN.

112. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I là trung điểm của BF, K là trung điểm của CE. Chứng minh rằng A, I, D, K thuộc cùng một đường tròn.

113. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, M là trung điểm của BC, K là hình chiếu của H trên AM. Chứng minh rằng B, H, K, C thuộc cùng một đường tròn.

114. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Đường vuông góc với HM tại M cắt AB, AH, AC theo thứ tự tại I, N, K. Chứng minh rằng NI = NK.

115. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi H là hình chiếu của A trên EF, K đối xứng với E qua H, I đối xứng với B qua D.

a) Chứng minh rằng BK = IE.

b) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CF. Chứng minh rằng MH = MD và NH = ND.

116. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 80^o$, $\widehat{C} = 40^o$. Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tính góc AHI.

117. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH, K là hình chiếu của I trên AM. Gọi N là giao điểm của KI và CH. Chứng minh rằng:

a) $\Delta NHI \backsim \Delta ABM$; b) $\widehat{NAC} = 90^o$.

118. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H, I là trung điểm của AH. Đường vuông góc với OI tại I cắt AB và AC theo thứ tự ở K và N. Chứng minh rằng IK = IN.

119. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), các đường cao BE, CF cắt nhau ở H. Gọi I là giao điểm của EF và BC. Gọi K là hình chiếu của A trên IH. Chứng minh rằng IFKC là tứ giác nội tiếp.

Scanned with CamScanner

120. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Gọi I là giao điểm của EF và BC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với IH, cắt BC ở M. Chứng minh rằng:

a) DMEF là tứ giác nội tiếp; b) MB = MC.

121. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Các điểm A', B', C' theo thứ tự chia trong các đoạn thẳng AD, BE, CF theo tỉ số 2:1. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.

122. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi M là hình chiếu của D trên AB, N là hình chiếu của D trên AC. MN cắt BE, CF theo thứ tự ở I, K. Chứng minh rằng:

a) DK ⊥ CF và DI ⊥ BE ; b) EF // MN .

123. Cho hình thang cân ABCD (AB là đáy nhỏ) nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AC, I là giao điểm của BH và đường tròn (O), K là giao điểm của MH và AD. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{DIB} = \overset{\frown}{ADC}$; b) Tứ giác AHIK nội tiếp; c) $\overset{\frown}{DIK} = 90^o$.

124*. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm N thuộc cạnh BC sao cho đường trung trực của NB cắt cạnh AB ở I, đường trung trực của NC cắt cạnh AC ở K. Gọi D là điểm đối xứng với N qua IK, H là trực tâm của tam giác INK. Chứng minh rằng:

a) Điểm D thuộc đường tròn (O);

b) Sáu điểm A, I, H, O, K, D thuộc cùng một đường tròn;

c) HO song song với BC.

125. Một hình thang cân có diện tích 32 cm^2, chu vi 26 cm, cạnh lớn nhất bằng 11 cm. Tính độ dài các cạnh còn lại.

126. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC ở D, cắt đường tròn ở E. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AB, AC. Chứng minh rằng:

a) AI + AK = AB + AC;

b) Diện tích tứ giác AMEN bằng diện tích tam giác ABC.

127. Một hình thang cân nội tiếp đường tròn tâm O, cạnh bên được nhìn từ O dưới góc 120^o. Tính diện tích hình thang, biết đường cao của hình thang bằng h.

128. Cho hình thang ABCD (AB // CD), AB = a, CD = b, a < b. Một đường tròn (O) đi qua A và B, cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N. Tính độ dài MN theo a, b, biết rằng các tứ giác ABNM và CDMN có diện tích bằng nhau.

129. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH, M là điểm nằm giữa B và H, I là trung điểm của AM. Đường thẳng đi qua M và song song với AC cắt AB ở D, DI cắt AC ở E. Gọi N là điểm đối xứng với M qua DE.

a) Chứng minh rằng ANDE là hình thang cân.

Scanned with CamScanner

b) Đường thẳng đi qua I và vuông góc với DE cắt AH ở O. Chứng minh rằng A, N, D, O, E thuộc cùng một đường tròn.

c) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

130. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

a) Chứng minh rằng OA vuông góc với EF.

b) Tính tỉ số diện tích các tam giác DEF và ABC theo R và r.

c) Tính tỉ số chu vi các tam giác DEF và ABC theo R và r.

d) Khi BC cố định, tìm vị trí của A để chu vi tam giác DEF lớn nhất.

131. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Gọi H là hình chiếu của A trên BC, I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên AD. Chứng minh rằng $AH^2 = AI \cdot AK$.

132. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $BH.BE + CH.CF = BC^2$; b) $AH.AD + BH.BE + CH.CF = \dfrac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}$.

133*. Gọi M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD. Khoảng cách từ M đến các đường thẳng AB, BC, CD, AD theo thứ tự là MH, MK, MI, MN. Chứng minh rằng MH.MI = MK.MN.

134. Cho tam giác ABC, điểm I nằm bên trong tam giác sao cho IB = IC. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của I trên AB, AC. Đường vuông góc với IB tại B cắt IM ở E. Đường vuông góc với IC tại C cắt IN ở F. Chứng minh rằng IA vuông góc với EF.

135. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), I là giao điểm các đường phân giác. Đường vuông góc với AI tại I cắt BC ở K. Gọi H là giao điểm thứ hai của AK với đường tròn (O). Chứng minh rằng IH vuông góc với AK.

136*. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD, M là trung điểm của BC. Đường tròn đi qua A, D, M cắt AB, AC theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng BE = CF.

137. Từ điểm I nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến IAB và IDC với đường tròn tạo với nhau góc 30° và IB = IC = 6 cm. Biết diện tích tứ giác ABCD bằng 15 cm^2, tính các độ dài IA và IB.

138. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B và tiếp xúc với AC tại C. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC. Gọi I, H, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, AC, AB. Gọi E là giao điểm của MB và IK, F là giao điểm của MC và IH. Chứng minh rằng:

a) MEIF là tứ giác nội tiếp; b) EF song song với BC; c) EF vuông góc với MI.

139. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn (O) tiếp xúc với hai cạnh AB và AC theo thứ tự tại D và E, cắt BC tại F và G (BF < BG).

a) BDHF là tứ giác nội tiếp; b) HB đi qua trung điểm của EF.

Scanned with CamScanner

140. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC, đường cao AH. Tiếp tuyến tại A cắt BC ở K. Gọi M là trung điểm của BC, E là hình chiếu của M trên AB. Qua A kẻ đường vuông góc với OK, cắt OK ở G và cắt EH ở I. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{HAI} = \widehat{OAM}$; b) AHIC là tứ giác nội tiếp; c) OK // CI.

141. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB. Gọi C là điểm thuộc cung nhỏ AB. Vẽ đường kính CE. Gọi K là giao điểm của BC và EA. Chứng minh rằng MA = MK.

142. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC. Gọi H là giao điểm của OA và BC, kẻ dây EF đi qua H.

a) Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc EAF.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E và F cắt nhau ở K. Tính góc OAK.

143. Cho đường tròn tâm O và hai điểm B, C thuộc đường tròn, các tiếp tuyến với đường tròn tại B và tại C cắt nhau ở A. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến với đường tròn tại M cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi giao điểm của OD, OE với BC theo thứ tự là I, K. Chứng minh rằng:

a) OBDK, DIKE là các tứ giác nội tiếp;

b) Các đường thẳng OM, DK, EI đồng quy.

144. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC. Một tiếp tuyến với cung nhỏ BC tại D cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F (BE < CF). Gọi I là giao điểm của OD và BC, M là giao điểm của AI và EF. Chứng minh rằng ME = MF.

145. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC. Một tiếp tuyến với cung nhỏ BC cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F (BE < CF). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm H sao cho CH = BE. Chứng minh rằng OEFH là tứ giác nội tiếp.

146. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC. Gọi D là điểm thuộc tia đối của tia AB. Kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn. Gọi M là giao điểm của EC và OA, K là giao điểm của CA và DM. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{OMD} = 90^o$; b) BD = CK.

147*. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn tâm O, vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với OB cắt BC, BE theo thứ tự ở H, K. Chứng minh rằng DH = HK.

148. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm K thuộc tia đối của tia AB. Kẻ các tiếp tuyến KE, KF và cát tuyến KCD (C nằm giữa K và D). Gọi I là giao điểm của OK và EF. Chứng minh rằng:

a) CIOD là tứ giác nội tiếp; b) CA là tia phân giác của góc KCI.

149. Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC với đường tròn. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO, cắt AO tại H và cắt đường tròn (O) tại E và F (E nằm giữa K và F). Gọi M là giao điểm của OK và BC. Chứng minh rằng:

a) EMOF là tứ giác nội tiếp;

b) AE, AF là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Scanned with CamScanner

150. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm đối xứng với O qua A. Kẻ tiếp tuyến ME, đường kính ED. Gọi C là giao điểm của MD với đường tròn, H là hình chiếu của E trên AB.

a) Chứng minh rằng DA là tia phân giác của góc MDH.

b) Gọi I là giao điểm của EH và AD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, C thẳng hàng.

151. Qua điểm K nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Đường thẳng đi qua C và song song với KB cắt BD ở E. Gọi I là trung điểm của CD, F là giao điểm của AB và CE. Chứng minh rằng:

a) AIFC là tứ giác nội tiếp; b) FC = FE.

152. Qua điểm K nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Gọi H là giao điểm của OK và AB.

a) Chứng minh rằng CHOD là tứ giác nội tiếp và HA là tia phân giác của góc CHD.

b) Đường thẳng đi qua C và song song với AD cắt AK và AB theo thự tự ở M và N. Chứng minh rằng CM = CN.

153. Cho đường tròn (O). Qua điểm K nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến KB, KD (B, D là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến KAC.

a) Chứng minh rằng AB. CD = AD. BC.

b) Vẽ dây CN song song với BD. Gọi I là giao điểm của AN và BD. Chứng minh rằng I là trung điểm của BD.

154*. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB, điểm C thuộc bán kính OA. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn ở D. Đường tròn tâm I tiếp xúc với nửa đường tròn và tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CD. Gọi E là tiếp điểm trên AC của đường tròn (I).

a) Chứng minh rằng BD = BE. b) Suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

155*. Cho đường tròn (O), dây AB. Vẽ về một phía của AB các đường tròn (I) và (K) tiếp xúc ngoài nhau tại C, tiếp xúc với AB theo thứ tự tại D và E, tiếp xúc trong với đường tròn (O) thro thứ tự tại G và H. Gọi M là giao điểm của GD và (O). Chứng minh rằng:

a) H, E, M thẳng hàng; b) GDEH là tứ giác nội tiếp;

c) MC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K); d) MA = MB = MC.

156*. Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Các dây BC, BD của đường tròn (O) tiếp xúc trong đường tròn (O') theo thứ tự tại E, F.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = 2\widehat{EAF}$;

b) Gọi I là giao điểm của EF với tia phân giác của góc CAD. Chứng minh rằng $\widehat{ICE} = \widehat{IAE} = \widehat{DAF}$ và I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

c) Suy ra cách dựng đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) cho trước và tiếp xúc với các dây BC, BD của đường tròn đó.

157. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Vẽ hình bình hành ADME ($D \in AB$, $E \in AC$). Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của BD, CE. Qua A kẻ đường vuông góc với IK, cắt BC ở N.

Scanned with CamScanner

a) Gọi F là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng BDFM và CEFN là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng BM = CN.

158. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$ (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là giao điểm của BO và AC, E là giao điểm của CO và AB.

a) Chứng minh rằng BD = CE.

b) Gọi F là điểm chính giữa của cung lớn BC. Chứng minh rằng năm điểm A, E, O, D, F thuộc cùng một đường tròn.

159. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O, O' nằm về hai phía của AB). OA cắt đường tròn (O') ở C, O'A cắt đường tròn (O) ở D.

a) Chứng minh rằng năm điểm B, O, O', C, D thuộc cùng một đường tròn.

b) Qua A kẻ cát tuyến chung EAF song song với CD, $E \in (O)$, $F \in (O')$. Chứng minh rằng AD song song với BE, AC song song với BF.

160. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O, O' nằm về hai phía của AB). Dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') tại A. Dây AD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta DBA$.

b) Gọi M là điểm thuộc đoạn thẳng CD. Vẽ hình bình hành AEMF. Chứng minh rằng AEBF là tứ giác nội tiếp.

161. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến CD, $C \in (O)$, $D \in (O')$, B gần CD hơn so với A. DB cắt đường tròn (O) ở E, CB cắt đường tròn (O') ở F. Gọi G là giao điểm của AC và BE, H là giao điểm của AD và CB. Chứng minh rằng:

a) AGBH là tứ giác nội tiếp; b) AB đi qua trung điểm của GH.

162*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn tâm I tùy ý đi qua B và C, cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N. Đường tròn tâm K ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Chứng minh $\widehat{ADI} = 90^{\circ}$ theo hai cách:

a) Chứng minh AKIO là hình bình hành;

b) Chứng minh tứ giác BIND nội tiếp.

163*. Cho hai đường tròn (O) và(O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD (C ∈ (O), D ∈ (O')). Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên OO'. Chứng minh rằng $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$.

164. a) Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác, K là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A. Chứng minh rằng AI.AK = AB.AC.

b) Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc M của tam giác AMB. Gọi D là tâm đường tròn

Scanned with CamScanner

nội tiếp, E là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc M của tam giác AMC. Chứng minh rằng bốn điểm I, K, E, D thuộc cùng một đường tròn.

165*. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC cắt đoạn nối các tâm B', C' của hai đường tròn bàng tiếp trong các góc B, C tại điểm M (khác A). Chứng minh rằng M là trung điểm của B'C'.

166. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O_2) đi qua I và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của các đường tròn (O_1), (O_2).

a) Chứng minh rằng ba điểm B, K, C thẳng hàng.

b) Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho BD = CE. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.

167*. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC và AB theo thứ tự ở D và E, cắt AD ở M, cắt MB ở K. Gọi H là giao điểm của BI và DE. Chứng minh rằng:

a) MKHI là tứ giác nội tiếp; b) $\overset{\frown}{EKM} = \overset{\frown}{HKD}$.

168. Cho góc xAy, điểm B cố định trên Ay, điểm C di chuyển trên Ax. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

169. Cho đường tròn tâm O, dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của tam giác ABM cắt nhau ở H.

a) Chứng minh rằng OM vuông góc với EF.

b) Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA, MB theo thứ tự ở C, D. Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M và vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

c) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

170*. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 40^\circ$, đường cao AH, điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3}AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3}AH$. Tính số đo góc BIK.

171. Tam giác ABC cân có $\hat{A} = 100^\circ$. Điểm D nằm khác phía A đối với BC sao cho $\overset{\frown}{CBD} = 15^\circ$, $\overset{\frown}{BCD} = 35^\circ$. Tính số đo góc ADB.

172. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AM ở N. Gọi I là giao điểm của AD và BN, K là giao điểm của CF và AM. Chứng minh rằng:

a) BFNM là tứ giác nội tiếp; b) IK // BC.

173. Cho góc nhọn xOy, các điểm A và B là điểm trong của góc đó sao cho $\overset{\frown}{AOx} = \overset{\frown}{BOy}$. Gọi hình chiếu của A trên Ox và Oy theo thứ tự là C và D, hình chiếu của B trên Ox và

Scanned with CamScanner

Oy theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, M, N thuộc cùng một đường tròn.

174*. Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Gọi I là trung điểm của BC, K là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng:

a) EB là tia phân giác của góc DEF; b) $BD \cdot EH = DE \cdot FH$;

c) $ID \cdot IK = IE^2$ (hệ thức Newton); d) $DB \cdot DC = DI \cdot DK$;

e) $\frac{1}{KB} + \frac{1}{KC} = \frac{2}{KD}$ (hệ thức Descartes).

175. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua AC. Vẽ hình bình hành DMEI. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm D, A, I, E thuộc cùng một đường tròn;

b) AI song song với BC.

176. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cung BC. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Gọi giao điểm của MD và AC là H, giao điểm của ME và AB là I, giao điểm của MF và BC là K. Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

177. Cho tam giác đều ABC. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi I là điểm thuộc cung nhỏ DE. Gọi K, M, N theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AB, AC. Chứng minh rằng $\sqrt{IK} = \sqrt{IM} + \sqrt{IN}$.

178. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB theo thứ tự ở D, E, F. Biết $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

179. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC và AC theo thứ tự ở D và E. Đường thẳng vuông góc với AD tại D cắt IB và IC theo thứ tự ở H và N. Gọi K là giao điểm của EI và HN.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, I, K, H thuộc cùng một đường tròn.

b) Tính $\widehat{AHD}$ theo $\widehat{BAC}$ và chứng minh DH = DN.

180*. Cho tam giác ABC cân tại A, AB = 16, BC = 24, đường cao AE. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC tại F.

a) Chứng minh rằng OECF là tứ giác nội tiếp và BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Gọi M là giao điểm của BF với đường tròn (O). Chứng minh rằng BMOC là tứ giác nội tiếp.

181. Tứ giác ABCD có AB = AD + BC, cạnh AB và các tia phân giác của các góc C và D đồng quy. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.

182. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD), điểm E nằm giữa C và D. Vẽ đường tròn (O) đi qua E và tiếp xúc với AD tại D. Vẽ đường tròn (O') đi qua E và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đó. Chứng minh rằng:

a) Năm điểm A, B, C, D, K thuộc cùng một đường tròn;

b) Ba điểm K, E, B thẳng hàng.

Scanned with CamScanner

183. a) Tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Vẽ hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng $\widehat{ABH} = \widehat{ADH}$.

b) Cho tam giác ABC. Điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$. Vẽ hình bình hành BICK. Chứng minh rằng $\widehat{BAI} = \widehat{CAK}$.

184*. Cho tam giác ABC. Điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$. Gọi E là trung điểm của AI, M là trung điểm của BC, F là chân đường vuông góc kẻ từ I đến tia phân giác của góc BAC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, M thẳng hàng.

185. Cho điểm I nằm trong hình bình hành ABCD sao cho $\widehat{IAB} = \widehat{ICB}$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{IBC} = \widehat{IDC}$; b) Tính tổng $\widehat{AIB} + \widehat{CID}$.

186. Dựng ra phía ngoài một tứ giác nội tiếp các hình chữ nhật mà mỗi hình chữ nhật có một cạnh là của tứ giác, cạnh kia bằng cạnh đối diện của tứ giác. Chứng minh rằng giao điểm các đường chéo của bốn hình chữ nhật là các đỉnh của một hình chữ nhật.

187. Cho đường tròn đường kính AC, dây BD vuông góc với AC. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm của các đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Chứng minh rằng EFGH là hình vuông.

188. Cho hai hình vuông ABCD, AB'C'D' sao cho nếu vẽ các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông thì chiều từ A lần lượt qua B, C, D và chiều từ A lần lượt qua B', C', D' đều theo chiều quay của kim đồng hồ. Gọi I là giao điểm của BB' và DD'. Chứng minh rằng:

a) I thuộc đường tròn ngoại tiếp mỗi hình vuông; b) CC' cũng đi qua điểm I.

189*. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O ($\widehat{A} > 90^\circ$). Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F.

a) Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

b) Gọi M là giao điểm của BD và EF. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = 90^\circ$.

190. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và A'B', các tiếp tuyến chung trong CD và EF (A, A', C, E thuộc (O); B, B', D, F thuộc (O')). Gọi M là giao điểm của AB và EF, N là giao điểm của A'B' và CD, H là giao điểm của MN và OO'. Chứng minh rằng:

a) MN vuông góc với OO';

b) Năm điểm O', B, M, H, F thuộc cùng một đường tròn;

c) Năm điểm O, A, M, E, H thuộc cùng một đường tròn;

d*) Ba điểm H, D, B thẳng hàng;

e*) Ba điểm A, H, C thẳng hàng.

191*. Cho đường tròn tâm O, hai điểm A và B ở vị trí đối xứng với nhau qua một bán kính của đường tròn. Vẽ dây CD đi qua A, dây EF đi qua B. Các đường thẳng CE, DF cắt đường thẳng AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng AN = BM.

Scanned with CamScanner

192*. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song. F là giao điểm của AB và CD, E là giao điểm của DA và CB. Gọi H và G theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) Tia phân giác của góc BED cũng là tia phân giác của góc HEG.

b) Các tia phân giác của các góc BED và BFD gặp nhau tại một điểm nằm trên GH.

193*. Qua điểm I nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các cát tuyến IAB và ICD với đường tròn (AB < CD).

a) Gọi F là giao điểm của AC và BD. Tia phân giác của góc DFC ở CD ở H. Chứng minh rằng $\frac{HC}{HD} = \frac{IC}{IA}$ và $\frac{IH}{IC} = \frac{ID + IA}{IC + IA}$.

b) Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $\frac{IK}{ID} = \frac{IC + IA}{ID + IA}$.

c) Chứng minh rằng ABHK là tứ giác nội tiếp.

194*. Cho tứ giác ABCD. Vẽ bốn đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của một trong các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng bốn đường tròn đó cùng giao nhau tại một điểm.

195. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc A, B, C cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở D, E, F. Chứng minh rằng:

a) $AD > \frac{AB + AC}{2}$;

b) AD + BE + CF lớn hơn chu vi tam giác ABC.

196. Cho đường tròn (O), dây AB, điểm M thuộc đường tròn. Gọi Ax, By là các tiếp tuyến của đường tròn, H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, Ax, By. Chứng minh rằng:

a) $MH^2 = MI.MK$;

b) $MI + MK \geq 2MH$.

Đường thẳng Simson

197. Chứng minh rằng chân các đường vuông góc kẻ từ một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp một tam giác đến ba cạnh của tam giác ấy nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson mang tên nhà toán học Scotland *Robert Simson*, 1687 – 1768).

Sử dụng đường thẳng Simson để giải các bài tập từ 197 đến 202.

198. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung AC, Ax là tiếp tuyến tại A. Gọi H, I, K , N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC, Ax. Chứng minh rằng MH. MI = MK. MN.

199. Cho tam giác ABC và các điểm M, N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ấy. Biết các đường thẳng Simson của điểm M, của điểm N vuông góc với nhau. Chứng minh rằng MN là đường kính của đường tròn.

200. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H, I theo thứ tự là hình chiếu của B trên AC, CD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, HI. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác ABD và HBI đồng dạng;

b*) $\widehat{MNB} = 90^\circ$.

Scanned with CamScanner

201*. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

202. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao với đường tròn, điểm A chuyển động trên đường thẳng d. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của O trên d, D là hình chiếu của H trên AB, E là hình chiếu của H trên AC. Chứng minh rằng khi A chuyển động thì:

a) Đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định;

b) Đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

203. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tia phân giác của góc A cắt đường tròn ở D. Vẽ đường tròn (O') đi qua A và D cắt các đường thẳng AB và AD theo thứ tự ở E và F. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của BC, EF.

a) Chứng minh rằng DI vuông góc với BC, DK vuông góc với EF.

b) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. Chứng minh rằng bốn điểm M, K, I, N thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng AD vuông góc với IK.

Định lí Ptoleme

204. Chứng minh rằng trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối.

Định lí Pto-lê-mê (*Ptoleme*, thế kỉ II, nhà toán học Hy Lạp)

Sử dụng định lí Ptoleme để giải các bài toán từ bài 205 đến bài 207

205. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác nhọn đến các cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Định lí Cac-nô (*Lazare Carnot*, 1753 – 1823, nhà toán học Pháp)

206. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính 25 cm, AC = 48 cm, BC = 40 cm. Tính độ dài AB.

207. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là giao điểm các đường phân giác, $\widehat{OIA} = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng AB + AC = 2BC.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng IG song song với BC.

Định lí Miquel

208. Cho tứ giác ABCD có M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng bốn đường tròn ngoại tiếp tam giác MAD, MBC, NAB, NCD cùng đi qua một điểm.

Định lí Mi-ken (*Miquel*, 1840 – 1926, nhà toán học Pháp)

209. Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD ở Bài tập 208 là tứ giác nội tiếp thì điểm chung K của bốn đường tròn nói trên nằm trên đoạn thẳng MN.

Scanned with CamScanner

210. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), các tia AB và DC cắt nhau ở M, các tia DA và CB cắt nhau ở N. Gọi I là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn (DMN). Chứng minh rằng IB đi qua trung điểm của MN.

~ **Ví dụ:** 48 đến 52, 54, 57, 58, 61, 63.

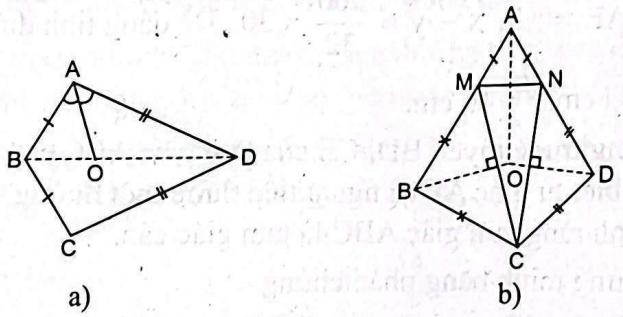
Bài tập: 230 đến 239, 245, 253 đến 255, 257 đến 259, 267 đến 269, 272 đến 274, 291, 298, 304 đến 306, 323 đến 335.

§5. TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP

Tứ giác ngoại tiếp một đường tròn là tứ giác có bốn cạnh tiếp xúc với đường tròn đó.

Điều kiện cần và đủ để một tứ giác ngoại tiếp đường tròn là tổng các cạnh đối bằng nhau.

Ví dụ 37. Chứng minh định lí "Nếu tứ giác ABCD có tổng các cạnh đối bằng nhau AB + CD = BC + AD thì tứ giác đó ngoại tiếp được một đường tròn" bằng cách chứng minh các tia phân giác của bốn góc A, B, C, D cùng gặp nhau tại một điểm.



Hình 47

Giải. Ta chỉ cần chứng minh các tia phân giác của ba góc A, B, D gặp nhau tại một điểm. Xét hai trường hợp:

a) Nếu AB = BC (h.47a) thì do giả thiết suy ra CD = AD, do đó BD là đường phân giác của các góc B và D. Gọi O là giao điểm của tia phân giác góc A với BD. Thế thì BO, DO là các tia phân giác của các góc $\widehat{B}$, $\widehat{D}$.

b) Nếu AB ≠ BC (h.47b), giả sử AB > BC, thế thì DA > DC. Lấy điểm M trên AB, điểm N trên AD sao cho BM = BC, DN = DC. Do giả thiết suy ra AM = AN. Các đường phân giác của các góc A, B, D chính là các đường trung trực của ΔCMN nên chúng gặp nhau tại một điểm O.

Điểm O là tâm của đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

dụ 38. Hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 16 cm, CD = 64 cm nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Tính bán kính của các đường tròn đó.

Giải. (h.48) Kẻ OH ⊥ AB, OK ⊥ CD, AE ⊥ CD.

Hình thang ABCD nội tiếp nên là hình thang cân AD = BC.

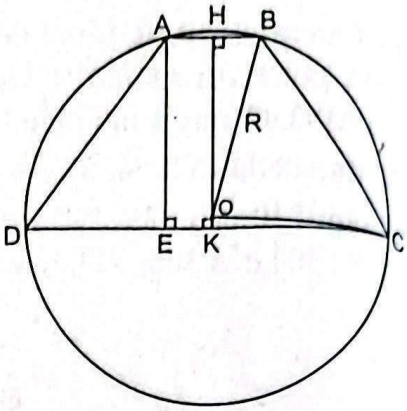
Hình thang ABCD ngoại tiếp nên AB + CD = AD + BC.

Scanned with CamScanner

Ta có

$$AD = BC = \frac{AB + CD}{2} = \frac{16 + 64}{2} = 40\,(cm),$$

$$DE = \frac{CD - AB}{2} = \frac{64 - 16}{2} = 24\,(cm).$$



Hình 48

Từ đó AE = 32 cm.

Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp.

Đặt OH = x, OK = y.

Ta có $OH^2 + HB^2 = R^2 = OK^2 + KC^2$

$\Rightarrow x^2 + 64 = y^2 + 1024 \Rightarrow x^2 - y^2 = 960 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 960.$

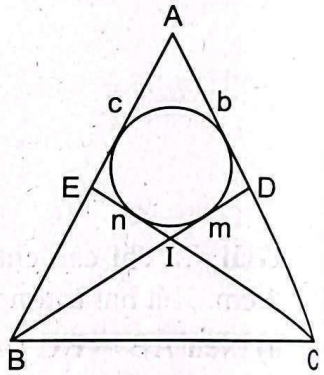
Nếu O ở bên ngoài hình thang thì x – y = AE = 32 cm.

Khi đó $x + y = \frac{960}{32} = 30 < 32 = x - y$, vô lí. Vậy O ở bên trong hình thang.

Ta có $x + y = AE = 32$, $x - y = \frac{960}{32} = 30$. Dễ dàng tính được x = 31, y = 1.

Từ đó $R = 5\sqrt{41}$ cm, r = 16 cm.

Ví dụ 39. Các đường trung tuyến BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại I. Cho biết tứ giác ADIE ngoại tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.



Hình 49

Giải. (h.49) Chứng minh bằng phản chứng.

Đặt AD = b, AE = c, ID = m, IE = n. Ta có ADIE là tứ giác ngoại tiếp nên

$$b + n = c + m. \qquad (1)$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được bổ đề: "Trong một tam giác, đường trung tuyến ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn".

Do đó:

Nếu b > c thì n > m (theo bổ đề). Suy ra

$$b + n > c + m, \text{ trái với (1).}$$

Nếu b < c thì n < m (theo bổ đề). Suy ra b + n < c + m, trái với (1).

Vậy b = c. Suy ra ΔABC là tam giác cân.

BÀI TẬP

Tứ giác ngoại tiếp đường tròn

211. Hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Tính diện tích hình thang biết rằng:

a) OB = 10 cm, OC = 20 cm;

b) AB = b, CD = a.

Scanned with CamScanner

212. Hình thang ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O, đáy nhỏ AB = 2 cm, E là tiếp điểm của đường tròn (O) trên cạnh BC. Biết rằng BE = 1 cm, EC = 4 cm. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân và tìm diện tích của nó.

213. Tính các cạnh của một hình thang cân ngoại tiếp đường tròn (O; 10 cm) biết khoảng cách giữa hai tiếp điểm trên cạnh bên bằng 16 cm.

214. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông ABCD, tiếp điểm trên AB là M. Một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác DFO và BOE đồng dạng;

b) ME song song với AF.

215. Cho tứ giác ABCD, các đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC, ADC tiếp xúc nhau. Chứng minh rằng các đường tròn nội tiếp hai tam giác BAD, BCD tiếp xúc nhau.

216. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp một đường tròn. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn đó.

217. Cho hình thang ABCD (AB // CD) ngoại tiếp đường tròn (O), tiếp điểm trên AB, CD theo thứ tự là E, F. Chứng minh rằng AC, BD, EF đồng quy.

218*. Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng quy tại giao điểm các đường chéo của tứ giác.

219*. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo BD và AC. Chứng minh rằng:

a) $S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$;

b) Ba điểm I, O, K thẳng hàng.

Tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn

220. Cho đường tròn tâm O, các dây AB, CD vuông góc với nhau. Các tiếp tuyến với đường tròn tại A, B, C, D cắt nhau lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh rằng EFGH là tứ giác nội tiếp.

221. Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác, AB = 14 cm, BC = 18 cm, CD = 26 cm. Gọi H là tiếp điểm của CD và đường tròn (O). Tính các độ dài HC, HD.

222*. Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O; r), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng:

a) $r^2 = AE.CG = BF.DH$;

b) Diện tích tứ giác ABCD bằng $\sqrt{abcd}$ với AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.

~ **Bài tập**: 297, 336, 338.

Scanned with CamScanner

§6. ĐA GIÁC ĐỀU

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

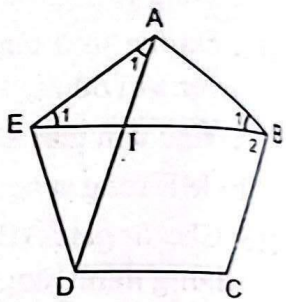
Ví dụ 40. Cho ngũ giác đều ABCDE cạnh a.

a) Chứng minh rằng mỗi đường chéo của ngũ giác song song với một cạnh.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AD và BE. Tứ giác DIBC là hình gì?

c) Chứng minh hệ thức $EB \cdot EI = a^2$.

d) Cho a = 2 cm. Tính độ dài đường chéo của ngũ giác.



Hình 50

Giải. (h.50) a) Mỗi góc của ngũ giác đều bằng $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

ΔABE cân tại A nên $\widehat{B_1} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

Suy ra $\widehat{B_2} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

$\widehat{B_2} + \widehat{C} = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$ nên BE // CD.

Tương tự với các đường chéo còn lại.

b) Ta có BE // CD và AD // BC nên DIBC là hình bình hành, lại có BC = CD nên DIBC là hình thoi.

c) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{E_1} = \widehat{B_1} = 36^\circ$ nên $\Delta BEA \backsim \Delta AEI$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{EB}{AE} = \frac{AE}{EI} \Rightarrow \frac{EB}{a} = \frac{a}{EI} \Rightarrow EB \cdot EI = a^2$.

d) Đặt EB = x. Với a = 2 thì từ $EB \cdot EI = a^2$, suy ra

$$x(x-2) = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Nghiệm dương của phương trình là $x = 1 + \sqrt{5}$.

Đường chéo của ngũ giác đều bằng $1 + \sqrt{5} \approx 3{,}24$ (cm).

Ví dụ 41. Tính số cạnh của hai đa giác đều, biết số đo mỗi góc của chúng tỉ lệ với 2 và 3.

Giải. Gọi số cạnh của đa giác đều I là m, số đo mỗi góc bằng $\frac{(m-2)\cdot 180^\circ}{m}$.

Gọi số cạnh của đa giác đều II là n, số đo mỗi góc bằng $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Ta có $\frac{(m-2)\cdot 180^\circ}{m} : \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 2:3$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \dfrac{m-2}{m} \cdot \dfrac{n}{n-2} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3n(m-2) = 2m(n-2)$

$\Leftrightarrow mn - 6n + 4m = 0 \Leftrightarrow (m-6)(n+4) = -24$.

Ta có $n \geq 3$ nên $n + 4 \geq 7$ và là ước của 24.

Do đó $n + 4 \in \{8; 12; 24\}$.

$n+4$	8	12	24
n	4	20	8
$m-6$	-3	-1	-2
m	3	5	4

Có ba đáp số: Số cạnh của hai đa giác đều là:

- 3 và 4 (các góc là 60° và 90°);
- 4 và 8 (các góc là 90° và 135°);
- 5 và 20 (các góc là 108° và 162°).

BÀI TẬP

223. Tìm hai đa giác đều, trong đó đa giác I có số cạnh gấp đôi số cạnh của đa giác II và có số đo mỗi góc cũng gấp đôi số đo mỗi góc của đa giác II.

224. Cho lục giác đều ABCDEF, M và N theo thứ tự là trung điểm của CD, DE. Gọi I là giao điểm của AM và BN.

a) Tính $\widehat{AIB}$.

b*) Tính $\widehat{OID}$ (O là tâm của lục giác đều).

Hướng dẫn: Chứng minh rằng IO, ID là các tia phân giác của hai góc kề bù.

225. Chứng minh rằng ngũ giác có năm cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau là ngũ giác đều.

226. Chứng minh rằng trong đa giác đều 9 cạnh, hiệu giữa đường chéo lớn nhất và đường chéo nhỏ nhất bằng cạnh của nó.

227. a) Tìm số n sao cho mặt phẳng có thể được phủ kín bởi các đa giác đều bằng nhau có n cạnh.

b) Có tồn tại các ngũ giác bằng nhau (không yêu cầu đều) để phủ kín mặt phẳng không?

c) Số đo các góc của đa giác đều n cạnh là số tự nhiên. Có bao nhiêu giá trị của n thoả mãn bài toán?

A) 24; B) 22; C) 12; D) 10.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

~ Bài tập: 347.

Scanned with CamScanner

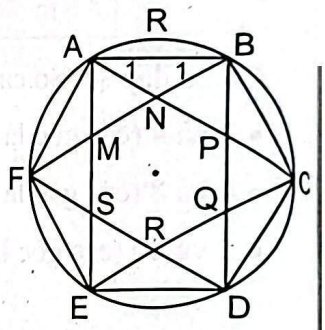
§7. ĐA GIÁC ĐỀU NỘI TIẾP, NGOẠI TIẾP

Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, khi đó đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.

Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác, khi đó đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

Đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp, một đường tròn nội tiếp. Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và được gọi là tâm của đa giác đều.

Ví dụ 42. Cho một lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R. Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau một đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.



Hình 51

Giải. Kí hiệu như trên Hình 51. Ta có ΔAMN đều (vì các góc bằng 60^o), ΔANB cân (vì $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 30^o$), ΔAMF cân, nên

$$FM = MN = NB = \frac{AB}{2\sin 60^o} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

MNPQRS là lục giác đều (dễ chứng minh) có diện tích bằng:

$$\frac{MN^2\sqrt{3}}{4}.6 = \frac{R^2\sqrt{3}}{3.4}.6 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 43. Một bát giác đều có cạnh bằng a, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Tính diện tích của bát giác đều (không dùng máy tính, bảng số):

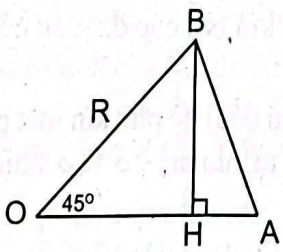
a) Theo R; b) Theo a.

Giải. Xét ΔAOB có $\widehat{O} = 45^o$, $OA = OB = R$, $AB = a$. Diện tích S của bát giác đều cạnh a, bán kính đường tròn ngoại tiếp R gấp 8 lần diện tích ΔAOB.

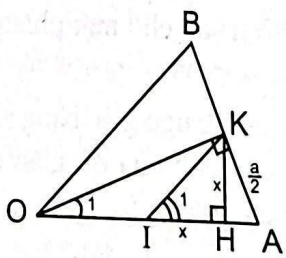
a) (h.52) Kẻ $BH \perp OA$ thì $BH = \frac{OB}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot BH = \frac{1}{2}R \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}.$$

$$S = 8 \cdot \frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2R^2\sqrt{2}.$$



Hình 52



Hình 53

b) (h.53) Kẻ $OK \perp AB$.

Scanned with CamScanner

$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OK$; $OK = AK \cdot \cot \widehat{O_1}$.

Gọi I là trung điểm của OA, kẻ $KH \perp OA$. Ta có $\cot \widehat{O_1} = \frac{OH}{KH}$.

Đặt KH = x, do $\widehat{I_1} = 45^\circ$ nên $KI = x\sqrt{2}$, do đó $OI = KI = x\sqrt{2}$. Suy ra

$$\cot \widehat{O_1} = \frac{OH}{KH} = \frac{x\sqrt{2} + x}{x} = \sqrt{2} + 1.$$

Vậy $S_{AOB} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Do đó $S = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2a^2\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

BÀI TẬP

228. Cho đa giác đều n cạnh, độ dài mỗi cạnh bằng a. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác.

a) Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn.

b) Tính chiều rộng của hình vành khăn đó.

229*. Cho tam giác đều ABC và hình vuông ADEG cùng nội tiếp đường tròn (O; R). Tính diện tích phần chung của tam giác và hình vuông.

Bài đọc thêm. NHỮNG ĐIỀU CÓ THỂ BẠN CHƯA BIẾT VỀ SỐ π

1. Số π có bao nhiêu chữ số thập phân?

Tỉ số giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó được nhà toán học xứ Wales là *William Jones* kí hiệu bằng chữ cái Hy Lạp π vào năm 1706 và ngày nay đã trở nên quen thuộc ngay cả với các học sinh tiểu học.

Trong chương trình Toán của ta, số π được giới thiệu ở lớp 5 với giá trị gần đúng là 3,14. Nếu cần chính xác hơn, ta lấy π = 3,1416 và kể ra như vậy độ chính xác đã khá cao rồi. Khi biết rằng giá trị 3,1416 cũng chỉ là giá trị gần đúng của số π, bạn đọc ưa tìm tòi chắc sẽ đặt câu hỏi: Lấy đến bao nhiêu chữ số thập phân thì đạt đến giá trị đúng của số π? Đó cũng chính là vấn đề đặt ra cho các nhà toán học.

Năm 1761, nhà toán học Thụy Sĩ Lambert chứng minh được rằng π là số vô tỉ, tức là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn: các chữ số thập phân của nó kéo dài mãi mà không bao giờ lặp lại theo chu kì nào, điều này được nhà toán học Ả Rập Al-Kashi dự đoán từ thế kỉ XV. Hơn nữa, năm 1882 nhà toán học Đức Lindemann còn chứng minh được rằng số π không phải là nghiệm của bất kì phương trình đại số nào, giải quyết trọn vẹn vấn đề do Euler nêu lên từ thế kỉ XVIII.

Năm 1949, người ta đã tính được, số π với hai nghìn chữ số thập phân. Năm 1999, nhà nghiên cứu tin học Nhật Bản *Kanada* đã tính được trên 206 tỉ chữ số thập phân của số π với một siêu máy tính chạy trong 46 giờ.

Scanned with CamScanner

2. Lịch sử số π

Bây giờ chúng ta cùng nhau lần giở lại những trang lịch sử của số π.

Từ hàng ngàn năm trước Công nguyên, người cổ Babylon đã tìm ra $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$. Trong các bản di cảo được tìm thấy ở Kim tự tháp, người Ai Cập cổ đã biết tính diện tích hình tròn có đường kính d bằng cách tính diện tích hình vuông có cạnh $\frac{8}{9}$d, như vậy số π được tính bằng $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ hay 3,16 (sai số là 2%).

Vào thế kỉ III trước Công nguyên, nhà toán học cổ Hy Lạp *Archimedes* đã tìm được $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ bằng cách xét các đa giác đều 96 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn.

Trong việc tìm giá trị của số π, người Trung Quốc đã đạt được những kết quả kì diệu. Đầu thế kỉ II, *Trương Hành* tìm được $\pi = \sqrt{10} \approx 3,162$. Đầu thế kỉ III, *Lưu Huy* biểu thị $\pi \approx 3,14$ và sau đó còn tìm được $\pi = 3,14159$. Đến thế kỉ V, *Tổ Xung Chi* đã tính số π đúng tới 8 chữ số: 3,1415926.

Mãi mười thế kỉ sau, kỉ lục trên mới bị phá bởi *Al-Kashi*: ông xét các đa giác đều có 3.10^{28} cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn và tìm được số π đúng với 17 chữ số:

3,141 592 653 589 793 2.

Ở nước ta, trong dân gian có lưu truyền một quy tắc xác định đường kính của hình tròn khi biết chu vi của nó "quân bát, phát tam, tồn ngũ, quân nhị" tức là "chia (chu vi) làm 8 phần, bỏ đi 3 phần, còn lại 5 phần, chia đôi". Theo quy tắc này, tỉ số của đường kính và chu vi bằng $\frac{5}{16}$, do đó số π bằng $\frac{16}{5} = 3,2$.

3. Một số cách biểu thị số π

Người ta còn biểu thị số π theo nhiều cách khác, chẳng hạn $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146$. Nhà toán học Đức Leibniz (1646 - 1716) cũng đưa ra một cách biểu thị số π bằng một chuỗi số vô hạn rất đẹp:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{(-1)^k}{2k+1} + ...\right).$$

Với k = 5000, ta tìm được $\pi \approx 3,1417$.

4. Dùng đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp để tìm số π

Archimedes là người đầu tiên tính giá trị của số π bằng cách tính chu vi các đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp một đường tròn. Độ dài của đường tròn nằm lọt giữa hai giá trị trên.

Bây giờ, bạn hãy dùng máy tính bỏ túi để tính giá trị của số π bằng cách tính chu vi của các đa giác đều 75 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn.

Scanned with CamScanner

Giải. Gọi R là bán kính của đường tròn. Chu vi đa giác đều 75 cạnh nội tiếp đường tròn bằng: $75.2.R.\sin\frac{180^o}{75} \approx 150R.0,0419.$

Chu vi đa giác đều 75 cạnh ngoại tiếp đường tròn bằng:

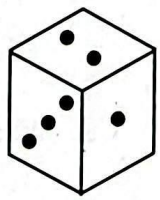
$$75.2R.\tan\frac{180^o}{75} \approx 150R.0,0419.$$

Do đó độ dài đường tròn bằng 150R. 0,0419. Suy ra $\pi = \frac{150R.0,0419}{2R} \approx 3,1425.$

5. Tung kim cũng tìm được số π

Ta biết rằng số π là tỉ số giữa chu vi hình tròn và đường kính của nó $\left(\pi = \frac{C}{d}\right)$.

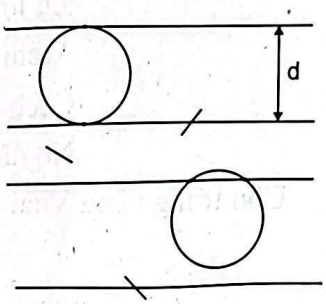
Tung kim để có giá trị gần đúng của số π là một bài toán xác suất. Lấy một ví dụ: Khi ta gieo 600 lần một viên xúc xắc có sáu mặt (h.54) thì mặt ghi số 2 chẳng hạn xuất hiện ở phía trên của viên xúc xắc khoảng 100 lần, tỉ số giữa số lần gieo xúc xắc và số lần mặt ghi số 2 xuất hiện ở phía trên vào khoảng $\frac{600}{100} = 6$.



Hình 54

Như thế có thể tung kim trên tờ giấy có các dòng kẻ ngang để tỉ số giữa số lần tung kim và số lần kim có giao điểm với các dòng kẻ cho ta số π. Bá tước người Pháp là Buýp-phông (Buffon, 1707 – 1788) đã nghĩ ra một cách làm như vậy.

Giả sử trên giấy có các dòng kẻ mảnh song song cách đều có khoảng cách bằng d. Khi vẽ một đường tròn đường kính d trên tờ giấy thì đường tròn đó luôn có hai giao điểm với các dòng kẻ (h.55.)



Hình 55

Giả sử ta tung đường tròn đường kính d trên mặt tờ giấy n lần thì các đường tròn tạo với các dòng kẻ 2n giao điểm. Ta chọn chiếc kim có chiều dài bằng bán kính của đường tròn nói trên. Do độ dài đường tròn gấp 2π lần bán kính của nó nên khi tung kim n lần thì kim chạm dòng kẻ $\frac{2n}{2\pi}$ lần, tức là $\frac{n}{\pi}$ lần.

Tỉ số giữa số lần tung kim và số lần kim chạm dòng kẻ là n: $\frac{n}{\pi} = \pi$.

Như vậy, nếu trên giấy có các dòng kẻ song song cách đều và kim có chiều dài bằng nửa khoảng cách giữa hai đường song song thì tỉ số giữa số lần tung kim và số lần kim chạm dòng kẻ cho ta số π. Năm 1777, Buffon đã mời khách đến nhà. Ông lấy ra một bó kim và đề nghị mọi người tung kim. Vị bá tước đã cộng được tất cả 2 212 lần tung kim, trong đó có 704 lần kim chạm dòng kẻ.

Phép chia 2 212 cho 704 cho kết quả 3,142. Và Buffon nói: "Đây chính là giá trị gần đúng của số π " trong sự ngạc nhiên của tất cả mọi người.

Scanned with CamScanner

6. Một vài cách nhớ giá trị của số π

Người ta đã đưa ra nhiều cách nhớ số π căn cứ vào số chữ cái trong các chữ của một số câu văn, câu thơ.

Người Anh có câu:

How I wish I could recollect, of circle round
The exact relation Archimede unwound!

Các chữ số của số π theo câu trên là: 3,141 592 653 589 7.

Tạm dịch: Ước gì tôi có thể tìm lại được mối quan hệ chính xác trong đường tròn đã được Archimedes giải quyết !

Người Pháp có câu:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur
Que de ton jugement peut sonder la valeur!
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Các chữ số của số π theo câu trên là:

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 (31 chữ số)

Tạm dịch:
Tôi thích biết bao được biết một con số
Ích lợi dường nào nhờ những bậc khôn ngoan!
Archimedes bất tử, người kĩ sư tuyệt đỉnh.
Cách đánh giá số π của Người hợp lí làm sao!
Nó đã giúp tôi vươn lên những tầm cao.

Còn trong tiếng Việt, năm 1943 Nguyễn Bá Thái đưa ra câu thơ:

Cầu Ô tuân ý Cao-xa
Ngân-giang lẻ phượng đậm-đà bắc ngang
Tưng-bừng nghênh-đón cô-nương
Chàng-Ngưu vui tỏ nỗi thương-ai tràn
Thường là chuyện khóc khó can
Hoá-thành mưa lũ miên-man tháng-ngày.

Câu này cũng gồm 31 chữ số của số π (chú ý rằng các chữ có gạch nối trong bài coi như một chữ, chẳng hạn Cao-xa biểu thị 5, Ngân-giang biểu thị 9).

Năm 1994, tác giả của cuốn sách này cũng đưa ra một cách nhớ số π với câu châm ngôn sau:

Một ý nghĩ ý tưởng trong-sáng
3 1 4 1 5 9
Là phương hướng cho nhiều hành-động cao-thượng.
2 6 5 3 5 8 9

Scanned with CamScanner

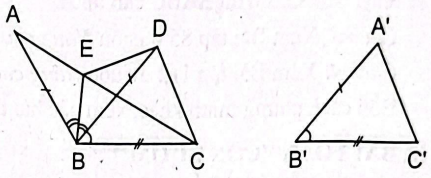
CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC

Chuyên đề 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN NỔI TIẾNG

I. BÀI TOÁN "TAM GIÁC CÓ HAI ĐƯỜNG PHÂN GIÁC BẰNG NHAU LÀ TAM GIÁC CÂN"

Trong các bài tập ở mục này, ta sử dụng bổ đề: Nếu hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì các cạnh thứ ba cũng không bằng nhau và cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Chứng minh. Xét các tam giác ABC và A'B'C' có AB = A'B', BC = B'C', $\widehat{B} > \widehat{B'}$ (h.56). Về cùng phía với A đối với BC, vẽ điểm D sao cho $\widehat{CBD} = \widehat{B'}$ và BD = B'A'. Ta có



Hình 56

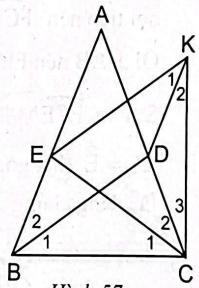
ΔDBC = ΔA'B'C' (c.g.c) nên DC = A'C'.

Tia phân giác của góc ABD cắt AC ở E, ta có ΔABE = ΔDBE (c.g.c) suy ra

AE = DE. Do đó AC = AE + EC = DE + EC > DC = A'C'.

Vậy AC > A'C'.

Ví dụ 44(4). Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE bằng nhau. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A.



Hình 57

Giải. *Cách 1* (h.57) Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$, $\widehat{B_2} > \widehat{C_2}$.

Xét ΔCBD và ΔBCE, ta có BC là cạnh chung, BD = CE, $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ nên CD > BE. (1)

Vẽ hình bình hành BEKD, ta có

BE = DK. (2)

EK = BD = CE. (3)

Từ (1) và (2) suy ra CD > DK nên $\widehat{K_2} > \widehat{C_3}$. Mặt khác $\widehat{K_1} = \widehat{B_2} > \widehat{C_2}$. Do đó $\widehat{K_1} + \widehat{K_2} > \widehat{C_2} + \widehat{C_3}$, tức là $\widehat{EKC} > \widehat{ECK}$, suy ra CE > EK, mâu thuẫn với (3).

Giả sử $\widehat{B} < \widehat{C}$, cũng chứng minh tương tự dẫn đến điều vô lí.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$, do đó ΔABC cân tại A.

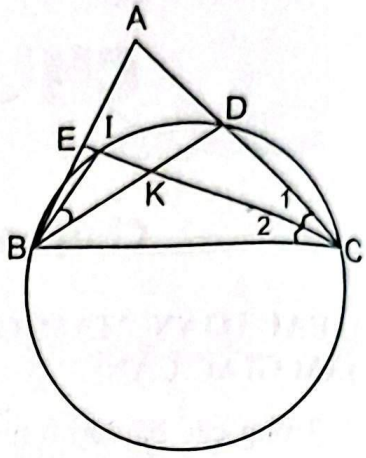
Scanned with CamScanner

Cách 2 (h.58). Gọi K là giao điểm của BD và CE.

Giả sử $\hat{B} > \hat{C}$ thì $\overset{\frown}{KBE} > \overset{\frown}{C_1}$, ta lấy điểm I trên đoạn thẳng KE sao cho $\overset{\frown}{KBI} = \overset{\frown}{C_1}$, thế thì BIDC là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có $\overset{\frown}{KBC} > \hat{C}_2$ nên $\overset{\frown}{KBI} + \overset{\frown}{KBC} > \hat{C}_1 + \hat{C}_2$ tức là $\overset{\frown}{IBC} > \hat{C}$.

Ta chú ý rằng $\overset{\frown}{IBC} < 90^o$ (vì $\overset{\frown}{IBC} = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} < 90^o$) nên từ $\overset{\frown}{IBC} > \hat{C}$ suy ra $\overset{\frown}{CI} > \overset{\frown}{BD}$, do đó CI > BD, dẫn đến CE > BD, trái với giả thiết.



Hình 58

Giả sử $\hat{B} < \hat{C}$ cũng dẫn đến điều trái với giả thiết.

Vậy $\hat{B} = \hat{C}$, do đó ΔABC cân tại A.

Cách 3. Xem Bài tập 85 ở cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai.

Cách 4. Xem Bài tập 112 ở cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai.

Bốn cách chứng minh khác, xem các bài tập từ 230 đến 233.

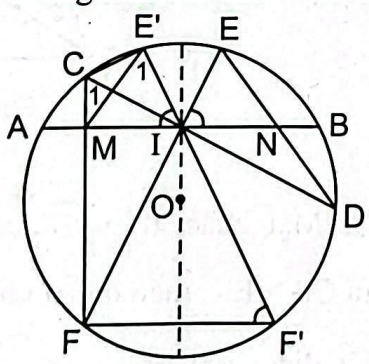
II. BÀI TOÁN "CON BƯỚM"

Ví dụ 45(4). Cho đường tròn (O), dây AB, các điểm C và E thuộc cung AB. Vẽ các dây CD, EF đi qua trung điểm I của AB. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của CF, ED với AB. Chứng minh rằng IM = IN.

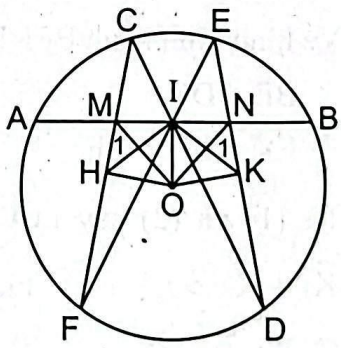
Giải. *Cách 1.* (h.59) Vẽ dây E'F' đối xứng với dây EF qua OI. Ta có FCE'F' là tứ giác nội tiếp nên $\overset{\frown}{FCE'} + \hat{F'} = 180^o$. Do F đối xứng với F' qua OI nên OI ⊥ FF', ta lại có OI ⊥ AB nên FF' // AB, suy ra $\hat{F'} = \overset{\frown}{MIE'}$.

Suy ra $\overset{\frown}{FCE'} + \overset{\frown}{MIE'} = 180^o$ nên MCE'I là tứ giác nội tiếp. Do đó $\hat{E}_1' = \hat{C}_1$. Ta lại có $\hat{C}_1 = \hat{E}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FD) nên $\hat{E}_1' = \hat{E}$.

Dễ dàng chứng minh ΔMIE' = ΔNIE (g.c.g) suy ra IM = IN.



Hình 59



Hình 60

Cách 2. (h.60) Dễ dàng chứng minh bài toán trong trường hợp AB là đường kính.

Scanned with CamScanner

Xét trường hợp AB không là đường kính. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của CF, ED. Ta có $\Delta CIF \backsim \Delta EID$ (g.g), IH và IK là các đường trung tuyến tương ứng nên $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$.

OIMH và OINK là các tứ giác nội tiếp nên $\hat{H}_1 = \widehat{IOM}$, $\hat{K}_1 = \widehat{ION}$. Suy ra

$$\widehat{IOM} = \widehat{ION}.$$

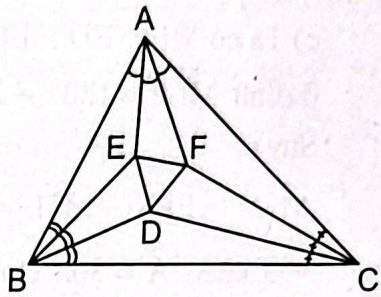
ΔOMN có đường cao OI cũng là đường phân giác nên IM = IN.

Cách 3. Xem Bài tập 235c.

III. BÀI TOÁN CHIA BA CÁC GÓC MỘT TAM GIÁC

Năm 1899, nhà toán học Anh sống ở Mỹ là Moóc-lây (*Morley*, 1860 – 1937, đã phát hiện rằng khi chia ba các góc của một tam giác thì ba giao điểm của các đường chia ấy là đỉnh của một tam giác đều (h.61).

Ví dụ sau đây chứng minh điều đó.



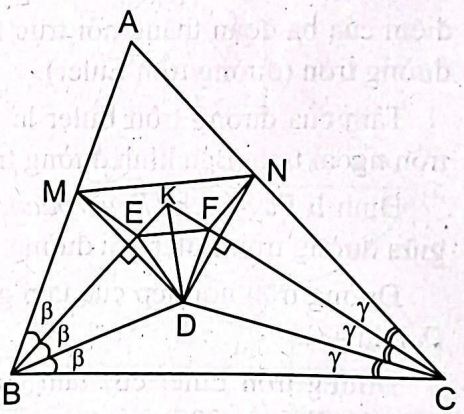
Hình 61

Ví dụ 46*(4). Cho tam giác ABC. Đặt $\hat{A} = 3\alpha$, $\hat{B} = 3\beta$, $\hat{C} = 3\gamma$. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $\widehat{KBA} = \beta$, $\widehat{KCA} = \gamma$. Gọi D là giao điểm của các đường phân giác của tam giác KBC. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng KB, điểm F thuộc đoạn thẳng KC sao cho $\widehat{KDE} = \widehat{KDF} = 30^\circ$.

a) Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

b) Gọi M, N theo thứ tự là điểm đối xứng với D qua KB, KC. Chứng minh rằng MEFN là hình thang cân, tính các góc của hình thang cân đó theo α.

c) Chứng minh rằng năm điểm A, M, E, F, N thuộc cùng một đường tròn và các tia AE, AF chia góc A thành ba góc bằng nhau.



Hình 62

Giải. (h.62) a) $\Delta KED = \Delta KFD$ (g.c.g) nên DE = DF.

Ta lại có $\widehat{EDF} = 60^\circ$ nên ΔDEF là tam giác đều.

b) KD là tia phân giác của góc BKC nên dễ dàng chứng minh được DM = DN. Tam giác cân DMN có DK là tia phân giác của góc MDN nên DK ⊥ MN.

Tam giác đều DEF có DK là tia phân giác của góc EDF nên DK ⊥ EF.

Suy ra EF// MN. Bây giờ ta tính các góc ở đáy MEF, EFN của hình thang MEFN.

Ta có

$$\widehat{MEF} = 360^\circ - 60^\circ - 2\widehat{DEB} = 300^\circ - 2\widehat{DEB} \text{ (xét các góc tại đỉnh E) (1)}$$

$$\widehat{DEB} = 30^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BKC}, \qquad (2)$$

Scanned with CamScanner

$\widehat{BKC} = 180^\circ - (2\beta + 2\gamma) = 180^\circ - 2(\beta + \gamma)$

$= 180^\circ - 2(60^\circ - \alpha) = 60^\circ + 2\alpha.$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$\widehat{MEF} = 300^\circ - (60^\circ + \widehat{BKC}) = 300^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 2\alpha) = 180^\circ - 2\alpha.$

Tương tự $\widehat{EFN} = 180^\circ - 2\alpha$.

Vậy MEFN là hình thang cân có các góc bằng $180^\circ - 2\alpha$ và 2α.

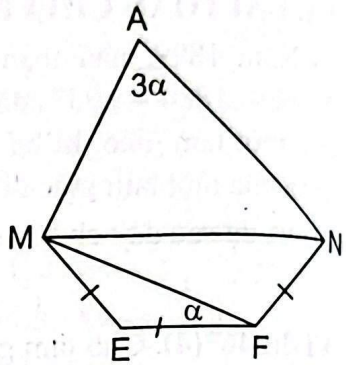
c) Ta có ME = ED = EF nên ΔMEF là tam giác cân, do góc ở đỉnh $\widehat{MEF} = 180^\circ - 2\alpha$ nên góc ở đáy $\widehat{MFE} = \alpha$ (h.63).

Suy ra

$\widehat{MFN} = \widehat{EFN} - \widehat{MFE} = 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha.$

Mặt khác $\widehat{A} = 3\alpha$. Do đó MFNA là tứ giác nội tiếp. Hình thang cân MEFN cũng là tứ giác nội tiếp.

Vậy năm điểm A, M, E, F, N thuộc cùng một đường tròn.



Hình 63

Do ME = EF = FN nên $\overset{\frown}{ME} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FN}$, suy ra

$\overset{\frown}{MAE} = \overset{\frown}{EAF} = \overset{\frown}{FAN}$.

IV. ĐỊNH LÍ FEUERBACH

Ta đã biết: Trong một tam giác, trung điểm của ba cạnh, chân ba đường cao, trung điểm của ba đoạn thẳng nối trực tâm với đỉnh của tam giác là chín điểm thuộc cùng một đường tròn (đường tròn Euler).

Tâm của đường tròn Euler là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm với tâm đường tròn ngoại tiếp. Bán kính đường tròn Euler bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Định lí Fây-bách (*Feuerbach*, 1800 – 1834, nhà toán học Đức) cho biết mối quan hệ giữa đường tròn Euler với đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp của một tam giác:

Đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc trong với đường tròn Euler của tam giác đó (Ví dụ 48).

Đường tròn Euler của tam giác tiếp xúc ngoài với ba đường tròn bàng tiếp của tam giác đó (Bài tập 237).

Ví dụ 47(4). (Bổ đề) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, trực tâm H. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, AI cắt BC ở E và cắt đường tròn (O) ở F. Đường kính FOG cắt BC ở M. Gọi X là hình chiếu của A trên FG, Q là trung điểm của OH. Gọi N và Q' theo thứ tự là hình chiếu của I và Q trên BC. Chứng minh rằng:

a) $QQ' = \frac{1}{2}OX$; b) $MN^2 = MD \cdot ME$.

Giải. (h.64) a) QQ' là đường trung bình của hình thang OMDH nên

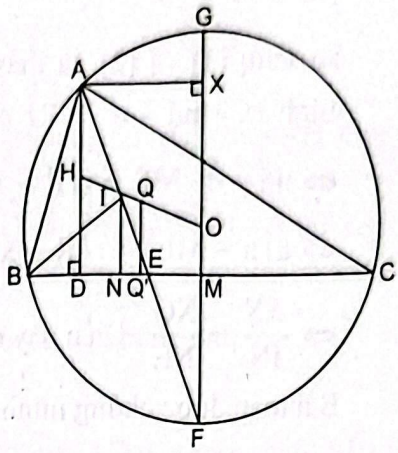
$2QQ' = HD + OM.$

Dễ chứng minh AH = 2OM nên OM = AH – OM. Suy ra

Scanned with CamScanner

$$2QQ' = HD + AH - OM = AD - OM = XM - OM = OX.$$

Vậy $QQ' = \frac{1}{2}OX$.



Hình 64

b) Để chứng minh $MN^2 = MD \cdot ME$, ta sẽ chứng minh $\frac{MN}{MD} = \frac{ME}{MN}$.

Theo định lí Thalès:

$$\frac{MN}{MD} = \frac{FI}{FA}, \frac{ME}{MN} = \frac{FE}{FI}. \qquad (1)$$

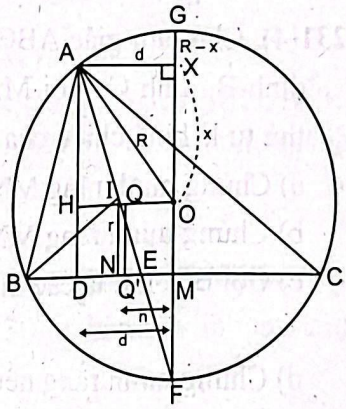
$\Delta FBE \backsim \Delta AFB$ (g.g) nên $\frac{FB}{FA} = \frac{FE}{FB}$, do đó

$$\frac{FI}{FA} = \frac{FE}{FI}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MN}{MD} = \frac{ME}{MN}$, do đó $MN^2 = MD \cdot ME$.

Ví dụ 48*(4). Với đề bài như Ví dụ 47, chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn $(Q; \frac{R}{2})$ với R là bán kính của đường tròn (O).

Giải. (h.65) Đặt IN = r. Để chứng minh đường tròn (I; r) tiếp xúc trong đường tròn $(Q; \frac{R}{2})$, ta sẽ chứng minh đoạn nối tâm bằng hiệu hai bán kính, tức là $IQ^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$.



Hình 65

Theo định lí Pythagore:

$$IQ^2 = \left(QQ' - IN\right)^2 + Q'N^2$$

$$= \left(QQ' - r\right)^2 + \left(MN - MQ'\right)^2.$$

Đặt OX = x, AX = MD = d, MN = n. Ta có $MQ' = \frac{MD}{2} = \frac{d}{2}$.

Theo Ví dụ 47, ta có $QQ' = \frac{x}{2}$. Do đó

$$IQ^2 = \left(\frac{x}{2} - r\right)^2 + \left(n - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + r^2 - rx + n^2 + \frac{d^2}{4} - nd.$$

$$= \frac{x^2 + d^2}{4} + r^2 - \left(rx + nd - n^2\right), \qquad (1)$$

Scanned with CamScanner

$$\left(\frac{R}{2}-r\right)^2=\frac{R^2}{4}+r^2-Rr. \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta thấy $x^2+d^2=OX^2+AX^2=OA^2=R^2$ nên chỉ cần chứng minh $rx+nd-n^2=Rr \Leftrightarrow nd-n^2=r(R-x)$

$\Leftrightarrow nd-d\cdot ME=r(R-x)$ (vì $n^2=d\cdot ME$ theo Ví dụ 47b)

$\Leftrightarrow d(n-ME)=r(R-x) \Leftrightarrow AX\cdot NE=IN\cdot XG$

$\Leftrightarrow \frac{AX}{IN}=\frac{XG}{NE}$. Điều này đúng vì $\Delta AXG \backsim \Delta INE$.

Bài toán được chứng minh.

BÀI TẬP

Liên quan đến bài toán "Tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân"

230(4). Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=2\beta$, $\widehat{C}=2\alpha$, các đường phân giác BD và CE bằng nhau. Vẽ hình bình hành BDCK.

a) Tính các góc BEK, BKE theo α và β.

b) Chứng minh rằng $\alpha=\beta$.

231(4). Cho tam giác ABC. Gọi d_1, d_2 theo thứ tự là đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh B, đỉnh C. Gọi M, Q theo thứ tự là hình chiếu của A, C trên d_1. Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên d_2.

a) Chứng minh rằng MN song song với BC.

b) Chứng minh rằng MNPQ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi BD, CE là các đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$BD.MQ=CE.NP.$$

d) Chứng minh rằng nếu BD = CE thì tam giác ABC là tam giác cân.

232(4). Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE bằng nhau và cắt nhau tại I.

a) Vẽ điểm N sao cho NB = AE, ND = AC (N và A cùng phía đối với BD). Chứng minh rằng ANBD là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi NK là đường phân giác của tam giác NBD. Chứng minh rằng ANKI là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng ANBD là hình thang cân.

d) Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

233(4). Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và EPQ có BC = PQ, $\widehat{A}=\widehat{E}$, các đường phân giác AD và EF bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

Hướng dẫn: Đặt các tam giác ABC, EPQ sao cho PQ trùng BC, A và E nằm cùng phía với BC và nằm cùng phía đối với đường trung trực của BC.

Scanned with CamScanner

234(4). Cho tam giác ABC, điểm D thuộc đường phân giác AI. Các đường thẳng BD, CD cắt AC, AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng nếu BM = CN thì tam giác ABC là tam giác cân.

Liên quan đến bài toán "con bướm"

235(4). Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), điểm E di chuyển trên cung AB. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của ED, EC với AB.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EMC cắt đường thẳng AB tại một điểm K cố định.

b) Đặt AM = a, MN = b, NB = c, chứng minh rằng $\frac{ac}{b}$ có giá trị không đổi.

c) Vận dụng câu b để giải Ví dụ 45.

236(4). Cho đường tròn (O), dây AB, các điểm C và E thuộc cung AB (C thuộc cung AE). Vẽ các dây CD, EF đi qua điểm I thuộc dây AB. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của CF, ED với AB. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AI}+\frac{1}{IN}=\frac{1}{IB}+\frac{1}{IM}.$$

Định lí Feuerbach

237*(4). Chứng minh rằng đường tròn Euler của tam giác ABC tiếp xúc ngoài với đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Bài toán của Na-pô-lê-ông (*Napoléon Bonaparte*, 1769 - 1821, Hoàng đế Pháp)

238(4). Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác đều BCD, ACE, ABF. Gọi H, I, K theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác đều ấy. Chứng minh rằng tam giác HIK là tam giác đều.

Bài toán trên còn có thể được diễn đạt như sau:

Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác cân BCH, ACI, ABK theo thứ tự có cạnh đáy là BC, AC, AB và góc ở đáy bằng 30°. Chứng minh rằng tam giác HIK là tam giác đều.

Bài toán của Pa-xcan *(Pascal*, 1623 - 1662, nhà toán học và vật lí học Pháp)

239*(4). Chứng minh rằng nếu một lục giác nội tiếp đường tròn có các cạnh đối không song song thì giao điểm của các cặp cạnh đối là ba điểm thẳng hàng.

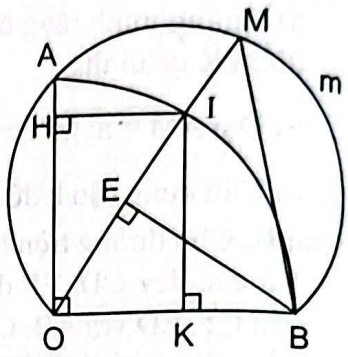
Scanned with CamScanner

Chuyên đề 2. QUỸ TÍCH

Cách giải bài toán tìm tập hợp điểm đã được trình bày ở chuyên đề *Tìm tập hợp điểm* trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8*, tập hai. Trong chuyên đề này, chúng ta làm quen với quỹ tích cung chứa góc và đi sâu hơn về cách giải bài toán quỹ tích.

I. QUỸ TÍCH CUNG CHỨA GÓC

Ví dụ 49(3). Cho cung AB cố định tạo bởi các bán kính OA, OB vuông góc với nhau, điểm I chuyển động trên cung AB. Trên tia OI lấy điểm M sao cho OM bằng tổng các khoảng cách từ I đến OA và đến OB. Tìm quỹ tích các điểm M.



Hình 66

Giải. (h.66)

Phần thuận. Kẻ IH ⊥ OA, IK ⊥ OB. Điểm M thuộc tia OI có tính chất OM = IH + IK. (1)

Kẻ BE ⊥ OI. Ta có ΔOBE = ΔOIK (cạnh huyền - góc nhọn) nên OE = OK = IH, BE = IK. (2)

Từ (1) và (2) suy ra OM = OE + BE, do đó EM = EB.

Tam giác EMB vuông cân nên $\widehat{EMB} = 45^o$. Điểm M nhìn OB cố định dưới góc 45^o nên M di chuyển trên cung chứa góc 45^o dựng trên OB.

Giới hạn. Vì điểm M chỉ nằm trong góc vuông AOB nên M chỉ di chuyển trên cung AmB, một phần của cung chứa góc 45^o dựng trên OB (phần cung nằm trong góc AOB).

Phần đảo. Lấy điểm M bất kì trên cung AmB nói trên. Kẻ BE ⊥ OM, IH ⊥ OA, IK ⊥ OB. Ta sẽ chứng minh OM = IH + IK.

Thật vậy, do $\widehat{OMB} = 45^o$ nên ΔEMB vuông cân, suy ra EM = EB.

ΔOBE = ΔOIK (cạnh huyền - góc nhọn) nên OE = OK = IH, BE = IK.

Do đó EM = IK.

Vậy OM = OE + EM = IH + IK.

Kết luận. Quỹ tích các điểm M là cung AmB, một phần của cung chứa góc 45^o dựng trên OB (phần nằm trong góc AOB).

Chú ý

a) Các cách khác để chứng minh phần đảo:

- Trên tia OM lấy điểm E sao cho OE = IH, chứng minh rằng EM = IK.
- Kẻ AF ⊥ OM, chứng minh rằng OF = IK, FM = IH.
- Trên tia OM lấy điểm F sao cho OF = IK, chứng minh rằng FM = IH.

b) Tổng quát, khi chứng minh phần đảo của bài toán quỹ tích, sau khi lấy điểm M bất thuộc hình vừa tìm được, ta phải chứng minh rằng điểm M có tính chất T nêu trong đề . Tính chất T này thường được tách làm hai nhóm tính chất T_1 và T_2. Ta dựng các điểm uyển động còn lại thoả mãn tính chất T_1 rồi chứng minh M và các điểm ấy thoả mãn

Scanned with CamScanner

tính chất T_2. Như thế, tuỳ theo cách chia nhóm T_1 và T_2 mà có nhiều cách chứng minh đảo đối với cùng một bài toán.

c) Cung AmB ở Ví dụ 49 chính là nửa đường tròn đường kính AB. Thật vậy, $\widehat{OMB} = \widehat{OAB}$ (cùng bằng 45^0) nên OAMB là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AMB} = 90^0$. Do đó có thể giải ví dụ trên bằng cách đưa về quỹ tích cung chứa góc vuông: Điểm M nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới góc vuông, từ đó dẫn đến quỹ tích của M là nửa đường tròn đường kính AB (nửa đường tròn không đi qua O).

II. PHÁT HIỆN ĐIỂM CỐ ĐỊNH ĐỂ TÌM QUỸ TÍCH

Ví dụ 50(4). Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho AM = CN. Tìm quỹ tích các tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

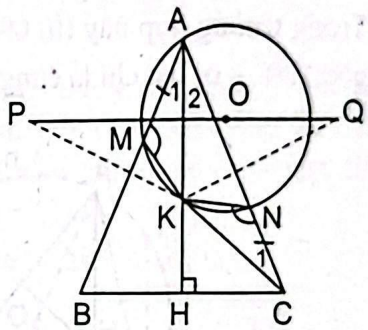
Giải. (h.67)

1. *Phần thuận.* Đường tròn (O) đi qua một điểm cố định là A. Ta sẽ chứng minh rằng (O) còn đi qua một điểm cố định khác.

Gọi giao điểm khác A của (O) với đường cao AH (cố định) là K. Ta có AMKN là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMK} = \widehat{CNK}$. Ta lại có

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \widehat{KM} = \widehat{KN} \Rightarrow KM = KN.$$

Do đó $\Delta AMK = \Delta CNK$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1' \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1' \Rightarrow$ K thuộc đường trung trực của AC. Vậy K là điểm cố định, đó là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC.



Hình 67

Đường tròn (O) đi qua hai điểm cố định A và K nên O nằm trên đường trung trực d của AK.

Giới hạn. Khi M ≡ A thì N ≡ C, O ≡ Q, giao điểm của d với đường trung trực của AC.

Khi M ≡ B thì N ≡ A, O ≡ P, giao điểm của d với đường trung trực của AB.

Như vậy O chỉ di chuyển trên đoạn thẳng PQ.

2. *Phần đảo.* Bạn đọc tự chứng minh.

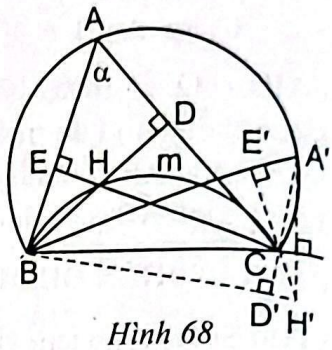
3. *Kết luận.* Quỹ tích của O là đoạn thẳng PQ nằm trên đường trung trực của AK (K là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC).

III. VẬN DỤNG CÁC PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC, ĐỐI XỨNG TÂM, VỊ TỰ ĐỂ TÌM QUỸ TÍCH

Các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự còn được gọi chung là phép biến hình. Trong nhiều trường hợp, điểm M phải tìm quỹ tích là ảnh của một điểm N trong một phép biến hình f. Người ta chứng minh được rằng: Nếu quỹ tích các điểm N là một hình H thì quỹ tích các điểm M là hình H', là ảnh của hình H trong phép biến hình nói trên.

Scanned with CamScanner

Ví dụ 51(3). Tìm quỹ tích trực tâm H của các tam giác ABC có BC cố định, $\widehat{A} = \alpha$ không đổi (để cho gọn, ta chỉ xét điểm A di chuyển về một phía của BC).



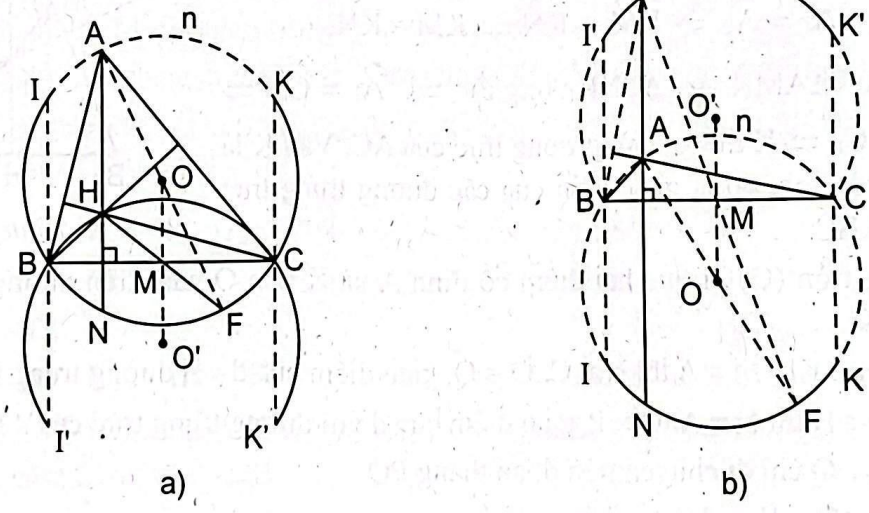
Hình 68

Một sai lầm dễ mắc

Một học sinh giải như sau: Gọi BD, CE là các đường cao của ΔABC (h.68).

Ta có $\widehat{BHC} = \widehat{DHE} = 180^o - \widehat{A} = 180^o - \alpha$. Như vậy H di chuyển trên cung BmC chứa góc $180^o - \alpha$ dựng trên BC (cung nằm cùng phía với A đối với BC).

Lời giải trên đã *kể thiếu* quỹ tích của điểm H trong trường hợp $\alpha < 90^o$. Thật vậy, giả sử ta lấy điểm A ở vị trí A' sao cho $\widehat{BCA'} > 90^o$ (h. 68), thế thì điểm H ở vị trí H', khi đó $\widehat{BH'C}$ bằng α (chứ không bằng $180^o - \alpha$), điểm H' không thuộc cung BmC nói trên. Vậy trong trường hợp $\alpha < 90^o$ (h. 69a), quỹ tích của điểm H là toàn bộ cung I'K'. Lời giải trên cũng *kể thừa* quỹ tích của điểm H trong trường hợp $\alpha > 90^o$. Trong trường hợp này (h. 69b), quỹ tích của điểm H không là toàn bộ cung BI'K'C chứa góc $180^o - \alpha$, mà chỉ là cung I'K'.



Hình 69

Gợi ý giải bài toán trên bằng cách vận dụng phép đối xứng trục

Điểm A di chuyển trên cung BnC chứa góc α dựng trên BC, cung chứa góc này thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC (h. 69).

Gọi giao điểm thứ hai của AH với (O) là N. Ta chứng minh được H đối xứng với N qua BC, do đó H là ảnh của N trong phép đối xứng trục BC. Kẻ các đường kính BK, CI của (O).

Khi A di chuyển trên cung BnC thì N di chuyển trên cung IK không chứa A. Như vậy quỹ tích của H là cung I'K' đối xứng với cung IK nói trên qua BC (Hình 69a với $\alpha < 90^o$, hình 69b ứng với $\alpha > 90^o$).

Scanned with CamScanner

Gợi ý giải bài toán trên bằng cách vận dụng phép đối xứng tâm

Kẻ đường kính AF của (O) (h.69). Dễ dàng chứng minh được H đối xứng với F qua trung điểm M của BC, do đó H là ảnh của F trong phép đối xứng tâm M.

Khi A di chuyển trên cung BnC thì F di chuyển trên cung IK không chứa A. Như vậy quỹ tích của H là cung I'K' đối xứng với cung IK nói trên qua M.

Học sinh tự giải Ví dụ 51 theo các gợi ý trên.

Chú ý. Có thể giải bài toán trên bằng cách vận dụng phép tịnh tiến: H là ảnh của A trong phép tịnh tiến từ I đến B.

IV. BIỆN LUẬN TRONG BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

Ta xét một số trường hợp sau:

1. Hình dạng của quỹ tích thay đổi theo các trường hợp khác nhau của yếu tố cho trước.

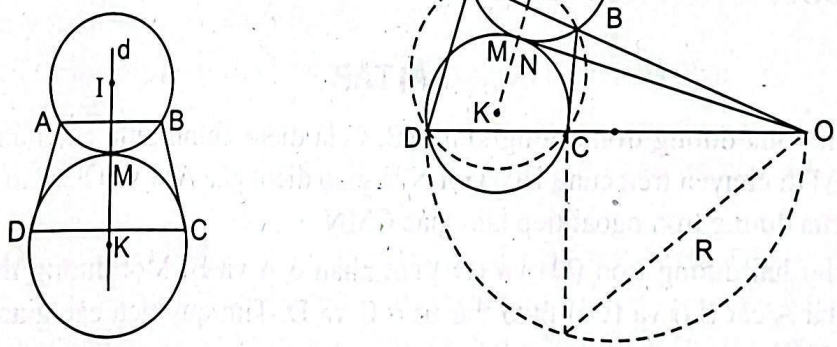
Khi đó cần xét từng trường hợp của yếu tố cho trước.

Ví dụ 52 (4). Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi (I) là đường tròn bất kì đi qua A và B, gọi (K) là đường tròn đi qua C, D và tiếp xúc với đường tròn (I). Gọi M là tiếp điểm của hai đường tròn (I) và (K). Điểm M di chuyển trên đường nào?

Giải. (h. 70)

- Xét trường hợp AB // CD (h. 70a). Khi đó ABCD là hình thang cân. Điểm I thuộc đường trung trực của AB, điểm K thuộc đường trung trực của CD. Các điểm I và K thuộc trục đối xứng d của hình thang cân. Tiếp điểm M nằm trên đường nối tâm IK nên thuộc đường trung trực của hai đáy nên cũng thuộc d.
- Xét trường hợp AB cắt CD tại O (h. 70b). Gọi ON là tiếp tuyến của (I), ta có

$$OA.OB = ON^2. \qquad (1)$$



a) *Hình 70* b)

Mặt khác ABCD là tứ giác nội tiếp nên

$$OA.OB = OC.OD. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $ON^2 = OC.OD$. Suy ra ON là tiếp tuyến của đường tròn đi qua D, C, N. Do đó ON là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K). Hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc nhau tại N và M ≡ N.

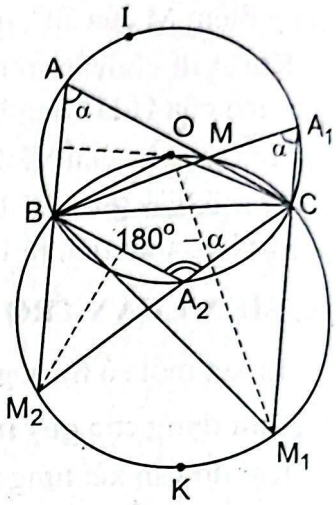
Scanned with CamScanner

Đặt $R = \sqrt{OC.OD}$, M di chuyển trên đường tròn (O; R). Cách dựng đường tròn nói trên được thể hiện trên hình 70b.

2. Quan hệ giữa điểm phải tìm quỹ tích với các yếu tố cố định có sự thay đổi tại các vị trí khác nhau của điểm phải tìm quỹ tích.

Khi đó cần giải bài toán ở từng phần của mặt phẳng rồi lấy tất cả các tập hợp điểm tìm được.

Ví dụ 53(4). Cho đường tròn tâm O và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn. Đường trung trực của AB cắt AC ở M. Tìm quỹ tích các điểm M.



Hình 71

Giải. (h. 71) Đặt $\overset{\frown}{BOC} = 2\alpha$. Xét các trường hợp:

a) $A \in \overset{\frown}{BI}$ (I thuộc cung lớn BC sao cho CI = CB). Ta có $\overset{\frown}{BAC} = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{BMC} = 2\alpha = \overset{\frown}{BOC} \Rightarrow$ B, O, M, C thuộc cùng một đường tròn $\Rightarrow$ M thuộc cung BOC chứa góc 2α của đường tròn ngoại tiếp ΔBOC.

b) A ở vị trí A_1 thuộc cung IC thì M ở vị trí M_1. Ta có $\overset{\frown}{BA_1C} = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{BM_1C} = 180^o - 2\alpha \Rightarrow BOCM_1$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M_1$ thuộc cung CK chứa góc $180^o - 2\alpha$ của đường tròn ngoại tiếp ΔBOC (OK là đường kính của đường tròn này).

c) A ở vị trí A_2 thuộc cung CB thì M ở vị trí M_2. Ta có $\overset{\frown}{BA_2C} = 180^o - \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{BM_2C} = 180^o - 2\alpha \Rightarrow BOCM_2$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M_2$ thuộc cung KB chứa góc $180^o - 2\alpha$ của đường tròn ngoại tiếp ΔBOC.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M gồm cả ba cung chứa góc trên, đó là đường tròn ngoại tiếp ΔBOC.

BÀI TẬP

240(3). Cho nửa đường tròn đường kính AB, C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm M di chuyển trên cung BC. Gọi N là giao điểm của AM và OC. Tìm quỹ tích các tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

241(3). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Một đường thẳng thay đổi luôn qua A cắt (O) và (O') theo thứ tự ở C và D. Tìm quỹ tích các giao điểm M của CO và DO'.

242(3). Tứ giác ABCD có AC cố định, $\widehat{A} = 45^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$.

a) Chứng minh rằng BD có độ dài không đổi.

b) Gọi E là giao điểm của BC và AD, F là giao điểm của DC và AB. Chứng minh rằng EF có độ dài không đổi.

c) Tìm quỹ tích các tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Scanned with CamScanner

243(3). Cho góc xOy và một điểm I cố định thuộc tia phân giác của góc ấy. Một đường tròn tâm I bán kính thay đổi cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở M, N (M không đối xứng với N qua OI).

a) Tìm quỹ tích các tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN.

b) Đường vuông góc với Ox tại M và đường vuông góc với Oy tại N cắt nhau ở P. Tìm quỹ tích các điểm P.

244(3). Cho đường tròn (O), dây AB. Điểm C di chuyển trên đường thẳng AB và nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Tìm quỹ tích giao điểm K của OC và DE.

245(4). Cho hình chữ nhật ABCD. Tìm quỹ tích các điểm M không nằm bên trong hình chữ nhật, có hình chiếu trên AB, BC, CD, DA theo thứ tự là E, F, G, H thoả mãn

$$ME^2 + MF^2 + MG^2 + MH^2 = BD^2.$$

246(3). a) Cho tam giác đều ABC. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

b) Cũng hỏi như câu a với M nằm khác phía A đối với BC.

247 (3). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $MA^2 = \dfrac{MB^2 - MC^2}{2}$.

248*(3). Cho M là một điểm thuộc đường tròn (O'; R). Đường tròn này lăn (không trượt) trong đường tròn (O; 2R). Tìm quỹ tích các điểm M.

Phát hiện điểm cố định để tìm quỹ tích

249(3). Tìm quỹ tích đỉnh C của các tam giác ABC có AB cố định, đường cao BH bằng cạnh AC.

250(3). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Một đường thẳng d bất kì luôn đi qua A cắt (O) và (O') theo thứ tự ở C và D.

a) Tìm quỹ tích các trung điểm M của CD.

b) Cho biết bán kính của các đường tròn (O) và (O') là 3cm và 2cm.

Tính tỉ số BC: BD.

c) Đường thẳng d có vị trí nào thì đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất (A nằm giữa C và D)?

251(3). Cho đường tròn (O), điểm A cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại A lấy một điểm B cố định. Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc với AB tại B và có bán kính thay đổi. Tìm quỹ tích các điểm I là trung điểm của dây chung MN của (O) và (O').

252(3). Cho đường tròn (O) và một điểm A ở bên trong đường tròn. Gọi BC là dây bất kì đi qua A. Các tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn cắt nhau ở điểm M. Tìm quỹ tích các điểm M.

253(4). Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD. Điểm E di chuyển trên đường tròn. Các đường thẳng AE, BE cắt đường thẳng CD theo thứ tự ở I, K. Tìm quỹ tích tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK.

Scanned with CamScanner

254(4). Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B. Kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm).

a) Tìm quỹ tích các điểm D và E.

b) Tìm quỹ tích các trung điểm K của DE.

c) Gọi MN là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với AB, F là giao điểm của CM với đường tròn (O). Chứng minh rằng AB, DE, FN đồng quy.

255(4). Cho đường tròn (O; R), điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn. BC là một đường kính thay đổi.

a) Tìm quỹ tích tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với đường tròn (O).

Tìm quỹ tích tâm O_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

c) Gọi F là giao điểm khác A của các đường tròn (O_1) và (O_2).

Chứng minh rằng AF, BC, DE đồng quy.

256(3). Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn. Gọi M là trung điểm của AC. Tìm quỹ tích hình chiếu H của M trên AB.

257(4). Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN, điểm K thuộc tia đối của tia MN. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt nửa đường tròn ở A và B. Các tiếp tuyến tại A và tại B cắt nhau ở C. Tìm quỹ tích của:

a) Tâm I các đường tròn nội tiếp tam giác ABC;

b) Tâm O' các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;

c) Trực tâm H của các tam giác ABC.

258(4). Cho đường tròn (O), điểm A cố định trên đường tròn, điểm B di chuyển trên đường tròn. Các tiếp tuyến tại A và tại B cắt nhau ở C. Tìm quỹ tích của:

a) Tâm I các đường tròn nội tiếp tam giác ABC;

b) Tâm O' các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;

c) Trực tâm H của các tam giác ABC.

Vận dụng các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự để tìm quỹ tích

259(4). Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định nằm trong góc đó. Một góc vuông đỉnh A có hai cạnh thay đổi cắt Ox, Oy theo thứ tự ở B, C. Gọi M là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Tìm quỹ tích các điểm M; b) Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC}$ là hằng số.

260(3). Cho đường tròn (O), điểm A cố định trên đường tròn, điểm B di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trọng tâm G của các tam giác OAB.

261(3). Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C di chuyển trên đường tròn. Gọi D là điểm đối xứng với A qua C, M là giao điểm của OD và BC. Tìm quỹ tích các điểm M.

262(3). Cho đường tròn (O), dây BC, điểm A di chuyển trên đường tròn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác OAH.

Scanned with CamScanner

263(3). Cho đường tròn (O), điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Một cát tuyến AMN luôn đi qua A. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác BMN.

264(3). Với đề bài như Bài tập 273, tìm quỹ tích của:

a) Điểm I đối xứng với O qua MN; b) Trực tâm H của tam giác BMN.

265(3). Cho đường tròn (O; R) và một điểm H cố định ở bên trong đường tròn. Xét các tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và nhận H làm trực tâm. Tìm quỹ tích:

a) Chân các đường cao của tam giác ABC;

b) Chân các đường trung tuyến của tam giác ABC.

266(3). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác đều ACD. Tìm quỹ tích các điểm D.

Các bài toán quỹ tích có biện luận

267(4). Cho đường tròn (O) và các đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Các điểm E, F chuyển động trên đường tròn (O) sao cho OE vuông góc với OF. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với CD, qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AB, chúng cắt nhau ở M. Tìm quỹ tích các điểm M.

268(4). Cho đường tròn (O) và dây AB cố định. Các điểm M, N di chuyển trên đường tròn sao cho AM = BN. Tìm quỹ tích giao điểm I của các đường thẳng AM và BN.

269(4). Cho tam giác ABC cân tại A. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho MA là tia phân giác của góc BMC.

270(4). Cho tam giác ABC cân tại A. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A. Trên d lấy điểm M sao cho MC + MB nhỏ nhất. Tìm quỹ tích các điểm M.

271(4). Tìm quỹ tích các điểm M mà từ đó ta nhìn một hình vuông cho trước dưới một góc bằng 45°.

272(4). Cho đường tròn (O) và dây AB cố định. Điểm M di chuyển trên đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB. Gọi I là giao điểm của hai tiếp tuyến (khác AB) kẻ từ A và B với đường tròn (M). Tìm quỹ tích của điểm I.

273(4). a) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng thay đổi luôn đi qua A cắt hai đường tròn (O), (O') theo thứ tự ở C, D. Tìm quỹ tích tâm I các đường tròn nội tiếp tam giác CBD.

b) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ cát tuyến cố định CAD, $C \in (O)$, $D \in (O')$. Một đường thẳng thay đổi luôn đi qua A cắt hai đường tròn (O), (O') theo thứ tự ở M, N. Tìm quỹ tích giao điểm P của các đường thẳng CM và DN.

274*(4). Cho tam giác ABC và điểm D cố định trên cạnh BC. Một góc vuông đỉnh D có các cạnh thay đổi vị trí cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở M, N. Tìm quỹ tích hình chiếu H của D trên MN.

Scanned with CamScanner

Chuyên đề 3. DỰNG HÌNH

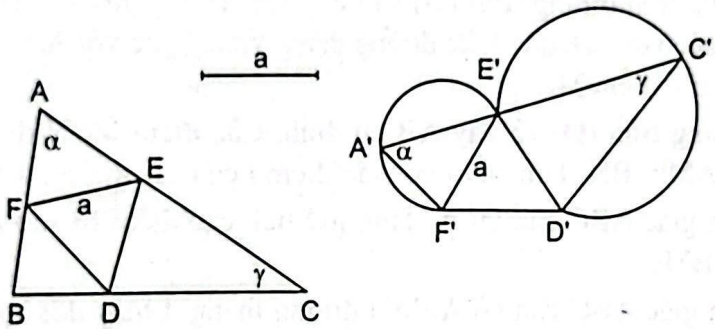
Toán dựng hình đã được giới thiệu trong các cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập một, tập hai, *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập một.

I. DỰNG HÌNH THEO THỨ TỰ NGƯỢC

Ví dụ 54(3). Cho tam giác ABC. Dựng tam giác đều DEF có độ dài cạnh bằng a cho trước, ba đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác ABC.

Nhận xét: Cho trước tam giác ABC, cần dựng tam giác đều DEF cạnh a sao cho $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Ta xét cách làm sau: Cho trước tam giác đều DEF cạnh a, dựng tam giác ABC sao cho $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Từ đó có cách giải sau, ta gọi là dựng hình "theo thứ tự ngược".

Giải. (h. 72) Cần dựng ΔDEF đều cạnh a có $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Gọi $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \gamma$. Để xác định vị trí của E trên AC, ta dựng một hình khác theo thứ tự ngược lại:



Hình 72

- Dựng $\Delta D'E'F'$ đều cạnh a.
- Dựng ra phía ngoài $\Delta D'E'F'$ các cung chứa góc α, γ theo thứ tự dựng trên các cạnh E'F', D'E'.
- Qua E', dựng cát tuyến A'E'C' có độ dài bằng AC, cắt các cung chứa góc α, γ theo thứ tự ở A', C' (bạn đọc tự giải bài toán này).

Biết vị trí của E' trên A'C', ta xác định được vị trí của E trên AC. Từ đó dựng được D và F.

Bài toán có thể có 0, 1, 2 nghiệm hình.

II. TÌM THÊM CÁC ĐIỂM CỐ ĐỊNH TRONG BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

Bài toán dựng hình nào cũng có những điểm cố định. Từ các điểm cố định đó có thể tạo ra nhiều điểm cố định mới, chẳng hạn:

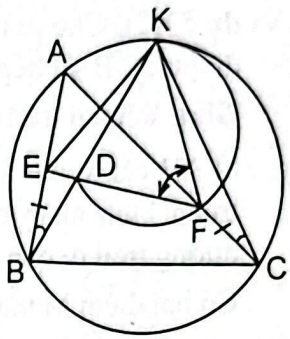
- Lấy giao điểm của hai đường thẳng.
- Dựng hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng.
- Chia một đoạn thẳng cho trước theo một tỉ số nào đó.
- Sử dụng phép biến hình (dựng hình đối xứng qua một tâm, qua một trục...).

Cách tạo điểm cố định mới là có ích nếu nó làm xuất hiện các quan hệ mới trong hình vẽ.

Scanned with CamScanner

Ví dụ 55*(3). Cho tam giác ABC và một điểm D nằm trong tam giác. Dựng đường thẳng đi qua D cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F sao cho BE = CF.

Giải. (h.73) Ta nhớ lại một bài toán mang tính chất một bổ đề: Khi các điểm E, F thay đổi vị trí trên AB, AC mà BE = CF thì đường trung trực của EF luôn đi qua một điểm cố định, đó là điểm chính giữa của cung BC chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 73

Thật vậy, gọi K là điểm chính giữa cung BC nói trên. Ta có ΔKBE = ΔKCF (c.g.c) nên KE = KF. Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta tính $\widehat{KFE}$. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ (không đổi).

Do ΔKBE = ΔKCF nên $\overset{\frown}{EKB} = \overset{\frown}{FKC}$, suy ra

$\overset{\frown}{EKF} = \overset{\frown}{BKC} = \overset{\frown}{BAC} = \alpha$. Do đó góc đáy $\widehat{KFE} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Điểm F là giao điểm của cạnh AC với cung chứa góc $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ dựng trên KD.

Chú ý. Có thể thay điều kiện BE = CF bởi điều kiện tổng quát hơn: BE − CF = a. Để giải bài này, trên BA lấy B' sao cho BB' = a, và đưa về ví dụ 55, trong đó điểm B được thay bởi điểm B'.

III. PHƯƠNG PHÁP DỰNG ĐƯỜNG TRÒN PHỤ

Ví dụ 56*(4). Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B ở bên ngoài đường tròn. Dựng đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đi qua hai điểm A, B.

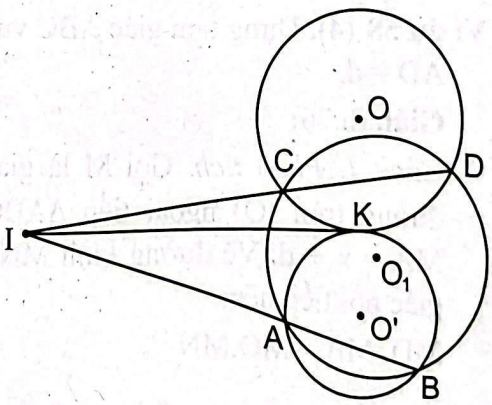
Giải. (h.74)

1. *Phân tích.* Giả sử đã dựng được đường tròn (O') đi qua A, B và tiếp xúc với (O) tại K. Kẻ tiếp tuyến chung Kx.

Trường hợp Kx // AB (khi đó O thuộc đường trung trực của AB), bài toán được giải dễ dàng (bạn đọc tự giải).

Trường hợp Kx cắt AB. Gọi I là giao điểm của Kx và AB. Kẻ đường thẳng bất kì qua I cắt (O) ở C, D.

Ta có $IA.IB = IK^2 = IC.ID \Rightarrow$ A, B, D, C thuộc cùng một đường tròn. Từ đó suy ra cách dựng.



Hình 74

2. *Cách dựng*

- Dựng đường tròn (O_1) bất kì đi qua A, B cắt (O) ở C, D.
- Gọi I là giao điểm của AB và CD. Dựng tiếp tuyến IK với đường tròn (O).
- Đường tròn đi qua A, B, K là đường tròn phải dựng.

3. *Chứng minh.* Bạn đọc tự giải.

4. *Biện luận.* Bài toán có hai nghiệm hình.

Scanned with CamScanner

IV. DỰNG HÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

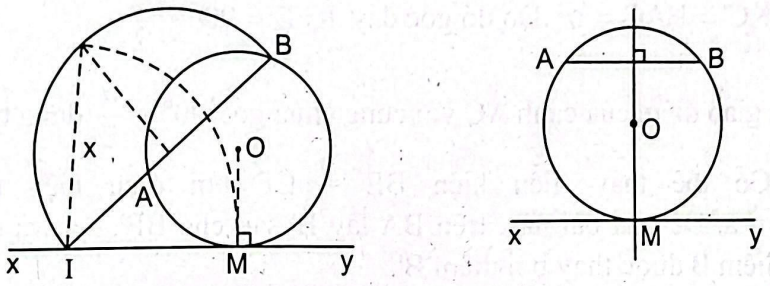
Dựng hình bằng phương pháp đại số đã được trình bày trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập một. Sau đây là một số ví dụ khác.

Ví dụ 57(2). Cho hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng xy. Dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng xy.

Giải. Xét hai trường hợp:

a) AB cắt xy tại I (h.75a). Gọi M là tiếp điểm, ta có $IM^2 = IA.IB$. Dựng được IM là trung bình nhân của IA và IB (cách dựng được thể hiện trên h.75a). Sau đó dựng đường tròn đi qua A, B, M.

Có hai điểm M nằm về hai phía của I trên xy. Bài toán có hai nghiệm hình.



a) b)

Hình 75

b) AB // xy (h.75b). Dựng đường trung trực của AB, cắt xy ở M. Đường tròn đi qua A, B, M là đường tròn phải dựng.

Bài toán có một nghiệm hình.

Ví dụ 58*(4). Dựng tam giác ABC vuông tại A biết cạnh huyền BC = a, đường phân giác AD = d.

Giải. (h.76)

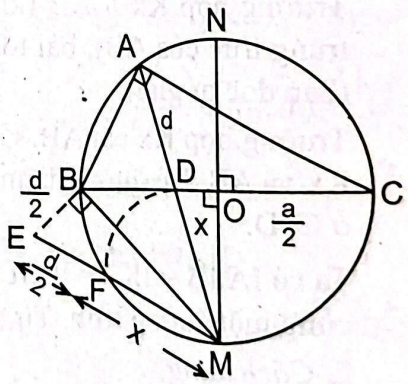
Cách 1. Phân tích. Gọi M là giao điểm của AD với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Đặt MD = x thì MA = x + d. Vẽ đường kính MN. Ta có ODAN là tứ giác nội tiếp nên:

MD. MA = MO.MN

$$x(x + d) = \frac{a}{2}.a \Rightarrow x^2 + xd = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + xd + \frac{d^2}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$



Hình 76

Scanned with CamScanner

Như vậy $x + \frac{d}{2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$ và $\frac{d}{2}$.

Cách dựng

- Dựng đường tròn tâm O đường kính BC = a.
- Dựng M là điểm chính giữa của cung BC.
- Dựng ΔMBE vuông tại B (đã có $MB = \frac{a}{\sqrt{2}}$) có $BE = \frac{d}{2}$.
- Trên tia EM lấy F sao cho EF = EB.
- Đường tròn (M; MF) cắt BC ở D.
- MD cắt (O) ở A. Nối AB, AC.

Cách 2. Xem Bài tập 316. Cách dựng này tổng quát hơn so với cách 1.

V. DỰNG HÌNH CHỈ BẰNG THƯỚC

Ví dụ 59(1). Cho một đường tròn đường kính AB và một điểm C trên đường tròn. Chỉ dùng thước, hãy dựng:

a) Dây EF vuông góc với AB; b) Dây CG vuông góc với AB.

Giải. a) *Cách dựng* (h.77)

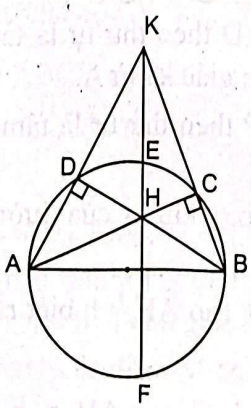
- Lấy điểm D thuộc cung AC.
- Dựng K là giao điểm của AD và BC.
- Dựng H là giao điểm của AC và BD.
- Đường thẳng HK cắt đường tròn ở E và F.

EF là dây phải dựng.

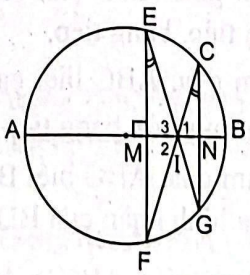
Chứng minh

$\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

H là trực tâm của ΔABK nên $KH \perp AB$, tức là $EF \perp AB$.



Hình 77



Hình 78

b) *Cách dựng* (h.78)

- Dựng dây EF vuông góc với AB (câu a).

Scanned with CamScanner

- Dựng I là giao điểm của CF và AB.
- Dựng G là giao điểm của EI và đường tròn.

CG là dây phải dựng.

Chứng minh

Đường kính AB vuông góc với EF tại M nên ME = MF.

ΔIEF có đường cao IM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra $\widehat{I_2} = \widehat{I_3}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{I_3}$.

Ta lại có $\widehat{C} = \widehat{E}$ (góc nội tiếp chắn cung FG) nên $\widehat{CNI} = \widehat{EMI} = 90^o$.

Ghi chú. Đầu tháng 9 – 2021, Thủ tướng Nga *Mikhail Mishustin* đã đến thăm một lớp học của một trường đào tạo những nhà khoa học. Tại lớp học đó, ông đã trình bày lời giải bài toán trên với đề bài như sau: Cho một đường tròn đường kính AB và một điểm C trên đường tròn. Chỉ dùng thước, hãy dựng đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

BÀI TẬP

275(2). Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dựng điểm I thuộc tia đối của tia AB sao cho nếu kẻ tiếp tuyến IK với đường tròn (O) thì IK = 2IA.

276(2). Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy. Dựng điểm M nằm giữa A và B sao cho $MA^2 = MB \cdot MC$.

277(2). Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Dựng đường tròn đi qua A, M và cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E sao cho DE song song với BC.

278(1). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. (O và O' nằm khác phía đối với AB). Dựng cát tuyến chung CBD sao cho AB là tia phân giác của góc CAD.

279(2). Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dựng cát tuyến ABC với đường tròn sao cho đường tròn đường kính BC tiếp xúc với OA.

280(2). Cho bốn điểm A, B, C, D. Dựng hình vuông EFGH có bốn cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) đi qua bốn điểm trên (mỗi đường thẳng đi qua một điểm).

281(1). Dựng tam giác ABC biết ba điểm O, H, D theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao kẻ từ A, chân đường phân giác kẻ từ A.

282(2). Dựng tam giác ABC biết ba điểm I, O, P theo thứ tự là tâm của các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp.

283(2). Dựng tam giác ABC biết cạnh BC = a, bán kính r của đường tròn nội tiếp, bán kính R_a của đường tròn bàng tiếp trong góc A.

284*(1). Dựng tam giác ABC biết BC = a, đường cao AH = h biết rằng đường phân giác AD bằng trung bình nhân của BD và DC.

285*(3). Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$, đường cao AH = h, đường trung tuyến AM = m.

Scanned with CamScanner

286*(3). Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$, AC – AB = d, bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r.

287(3). Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$ và AB – BC = m, AC – BC = n.

288(3). Cho ba tia chung gốc Ox, Oy, Oz. Dựng tam giác đều cạnh a có ba đỉnh thuộc ba tia trên.

289(3). a) Dựng tam giác vuông biết chu vi bằng 2p và bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r.

b) Dựng tam giác biết một cạnh bằng a, chu vi bằng 2p và bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r.

290(3). Cho góc xOy. Dựng đoạn thẳng AB = a có A thuộc tia Ox, B thuộc Oy sao cho OA + OB = m.

291(4). Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d. Dựng điểm M thuộc d sao cho AM + MB = a.

Dựng hình chỉ bằng thước

292(1). Cho một đường tròn đường kính AB và một điểm K nằm bên ngoài đường tròn, $\overset{\frown}{ABK} > 90^o$. Chỉ dùng thước, dựng đường thẳng đi qua K và vuông góc với AB.

Vận dụng các phép đối xứng, đối xứng tâm, vị tự, quay để dựng hình

Đối xứng trục

293(3). Dựng tam giác ABC biết $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, đường cao AH = h, đường trung tuyến AM = m.

294(3). Dựng tam giác ABC biết BC = a, $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, đường cao AH = h.

295(3). Cho góc nhọn xOy và hai điểm M, N nằm trong góc đó. Dựng điểm A thuộc tia Ox sao cho tia phân giác của góc MAN vuông góc với Oy.

296(3). Dựng tứ giác ABCD biết AB = a, AD = b (b > a), AC = m, $\widehat{B} - \widehat{D} = \alpha$ sao cho AC là tia phân giác của góc A.

297(3). Dựng tứ giác ABCD có AB = a, AD = b, $\widehat{B} = \alpha$, $\widehat{D} = \beta$ biết rằng tứ giác đó có thể ngoại tiếp được một đường tròn.

Đối xứng tâm

298(4). Cho tam giác nhọn ABC. Dựng điểm M nằm trong tam giác sao cho nếu lấy các điểm đối xứng với M qua trung điểm mỗi cạnh của tam giác ABC thì được ba điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

299(1). Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc. Dựng đường tròn (I) đi qua điểm M, cắt Ox, Oy thành các dây AB, CD sao cho $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{CMD} = \overset{\frown}{xOy}$.

Scanned with CamScanner

Vị tự

300(1). a) Cho ba đoạn thẳng OM, ON, OP có độ dài theo thứ tự bằng m, n, p và $\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POM} = 120^0$. Dựng ba đoạn thẳng có độ dài x, y, z tỉ lệ nghịch với m, n, p (tức là mx = ny = pz).

b) Dựng tam giác ABC có độ dài ba đường cao bằng m, n, p.

Dựng hình bằng phương pháp đại số

301(2). a) Cho a và b là hai đoạn thẳng cho trước. Dựng hai đoạn thẳng có tổng bằng a và có tích bằng b^2.

b) Cho a và d là hai đoạn thẳng cho trước. Dựng hai đoạn thẳng có hiệu bằng d và có diện tích bằng a^2.

c) Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết AB = a và HC = d (H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh huyền).

302(1). Cho tam giác ABC. Dựng điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MA^2 = MB \cdot MC$.

303*(2). Cho góc nhọn xAy và điểm B nằm trong góc. Dựng đường tròn (O) đi qua B và tiếp xúc với Ax, Ay.

304(4). Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB). D là một điểm thuộc cạnh BC. Đường vuông góc với DA tại A cắt các đường vuông góc với BC tại B và tại C theo thứ tự ở M và N. Dựng điểm D sao cho diện tích tam giác MDN gấp đôi diện tích tam giác ABC.

305(4). Cho ABCD là tứ giác nội tiếp. Dựng điểm E thuộc cạnh CD sao cho

$$\widehat{DAE} = \widehat{CBE}.$$

306*(4). Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$, BC = a, đường phân giác AD = d.

Chuyên đề 4. TOÁN CỰC TRỊ

Cách giải các bài toán cực trị đã được đề cập đến trong các cuốn trước. Sau đây là một số ví dụ khác.

I. TÌM NHIỀU CÁCH GIẢI TRONG BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Ví dụ 60(3). Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC = 2R, điểm A di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là hình chiếu của A trên BC. Gọi E và F theo thứ tự là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác AHB và AHC.

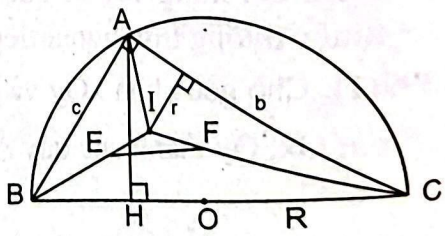
a) Chứng minh rằng AI = EF.

b) Tìm giá trị lớn nhất của EF.

Giải. (h.79) a) Xem Ví dụ 30, *Nâng cao và phát triển Toán 9*, tập một.

b) Đặt AC = b, AB = c, bán kính đường tròn (I) là r.

Ta có $EF = AI = r\sqrt{2}$.



Hình 79

Scanned with CamScanner

Cách 1. Dễ chứng minh $2r = AC + AB - BC = b + c - 2R$

Ta có $(b + c)^2 \le 2(b^2 + c^2) = 8R^2$

nên $b + c \le 2\sqrt{2}R$.

Suy ra $2r \le 2\sqrt{2}R - 2R$, do đó $r \le (\sqrt{2} - 1)R$.

Vậy $EF = r\sqrt{2} \le (2 - \sqrt{2})R$.

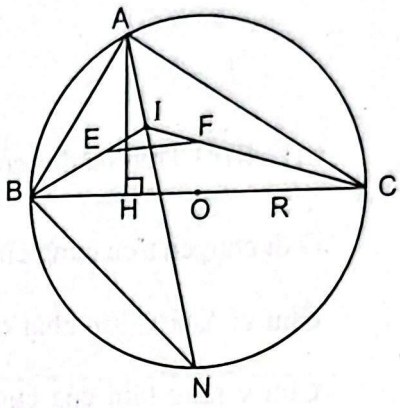
$\max EF = (2 - \sqrt{2})R \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

Cách 2. (h.80) Gọi N là giao điểm của AI và (O).

Dễ chứng minh $NI = NB = R\sqrt{2}$.

Ta có $EF = AI = NA - NI = NA - R\sqrt{2}$ nên EF lớn nhất $\Leftrightarrow$ NA lớn nhất $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa của nửa đường tròn đã cho.

Khi đó $EF = 2R - R\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})R$.



Hình 80

Cách 3. Do $EF = AI = r\sqrt{2}$ nên EF lớn nhất $\Leftrightarrow$ r lớn nhất.

Ta có $\widehat{BIC} = 135^\circ$ nên I di chuyển trên cung chứa góc 135° dựng trên BC. Do đó, r lớn nhất $\Leftrightarrow$ I là điểm chính giữa của cung chứa góc đó $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa của nửa đường tròn đã cho. Khi đó, ta tính được $r = R(\sqrt{2} - 1)$ nên

$$EF = (2 - \sqrt{2})R.$$

II. SỬ DỤNG QUỸ TÍCH ĐỂ TÌM CỰC TRỊ

Trong các bài toán cực trị, thường có các điểm di chuyển trên các hình nhất định. Các hình đó có khi được cho ngay trong đề bài, có khi phải được tìm ra bởi một bài toán quỹ tích.

Ví dụ 61(3). Trong các tam giác ABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, tam giác nào có:

a) Diện tích lớn nhất?

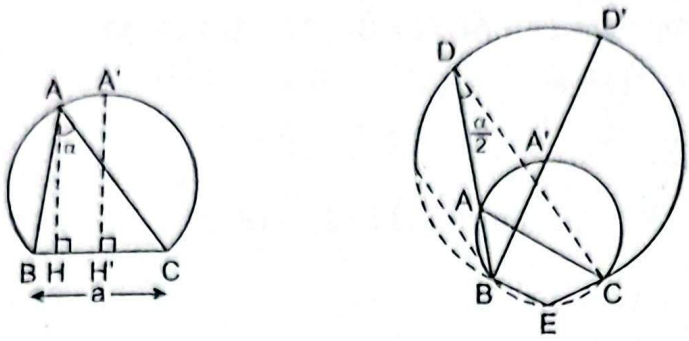
b) Chu vi lớn nhất?

Giải. Xét các tam giác ABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Khi đó A nằm trên cung chứa góc α dựng trên BC.

a) (h.81a) Gọi A' là điểm chính giữa của cung chứa góc nói trên. Kẻ AH, $A'H' \perp BC$. Hiển nhiên $AH \le A'H'$, do đó $S_{ABC} \le S_{A'BC}$.

Vậy trong các tam giác nói trên, tam giác cân tại A có diện tích lớn nhất.

Scanned with CamScanner



a) b)

Hình 81

b) (h.81b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Khi đó $\widehat{BDC} = \frac{\alpha}{2}$ nên D di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC (có giới hạn bởi tiếp tuyến tại B).

Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow$ BA + AC lớn nhất $\Leftrightarrow$ BD lớn nhất.

Chú ý rằng tâm của cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ là điểm chính giữa A' của cung chứa góc α.

Gọi giao điểm của BA' với cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ là D' (khác B). Ta luôn có BD $\leq$ BD' (đường kính là dây lớn nhất). Do đó BA + AC $\leq$ BA' + A'C..

Vậy $\Delta A'BC$ cân tại A' là tam giác có chu vi lớn nhất trong các tam giác ABC có BC = a, $\widehat{BAC} = \alpha$.

Chú ý. Có thể giải câu b bằng cách sử dụng định lí Ptoleme (Bài tập 204). Gọi E là điểm chính giữa của cung BC không chứa A (h.81b). Đặt EB = EC = m (không đổi). Áp dụng định lí Ptoleme vào tứ giác nội tiếp ABEC, ta có AB.EC + AC.BE = AE.BC, từ đó AB + AC = $AE \cdot \frac{a}{m}$. Do đó AB + AC lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE là đường kính $\Leftrightarrow$ ΔABC cân tại A (có BC = a, $\widehat{A} = \alpha$).

III. SO SÁNH HAI CỰC TRỊ TRONG MỘT BÀI TOÁN

Có những bài toán cực trị mà tại mỗi miền của mặt phẳng lại có cực trị riêng, khi đó ta cần so sánh chúng với nhau để tìm ra cực trị chung của bài toán.

Ví dụ 62(2). Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với xy. Tìm điểm M trên xy sao cho $\widehat{AMB}$ lớn nhất.

Giải. Trước hết ta xét bài toán phụ: Dựng đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với xy. Cách dựng đường tròn này được trình bày ở Ví dụ 57.

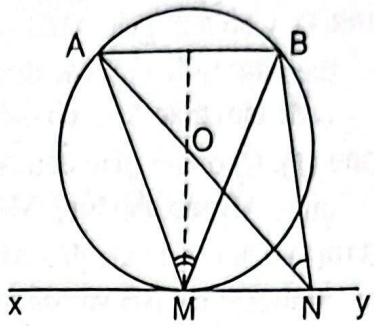
Xét hai trường hợp:

a) Trường hợp AB // xy, bài toán phụ có một nghiệm hình: có duy nhất một đường tròn đi qua AB và tiếp xúc xy tại M (h.82).

Scanned with CamScanner

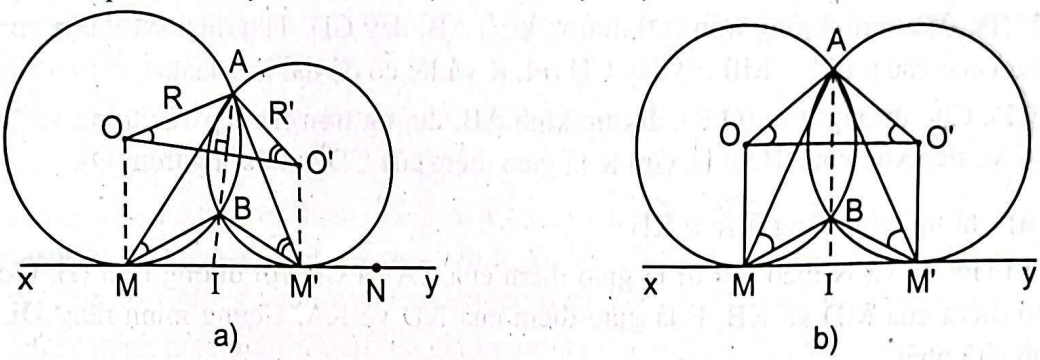
Khi đó bài toán cực trị cũng có một nghiệm hình duy nhất là điểm M nói trên. Thật vậy, lấy điểm N bất kì (khác M) thuộc xy, ta có $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AB}$ (góc nội tiếp), còn $\widehat{ANB} < \frac{1}{2}$sđ$\widehat{AB}$ (dễ chứng minh).

Do đó $\widehat{AMB} > \widehat{ANB}$.



Hình 82

b) Trường hợp AB cắt xy tại I, bài toán phụ có hai nghiệm hình: có hai đường tròn (O; R) và (O'; R') đi qa A, B và tiếp xúc với xy theo thứ tự tại M và M' (h.83).



Hình 83

Tương tự như trên, với mọi điểm N (khác M') thuộc tia Iy ta có $\widehat{AM'B} > \widehat{ANB}$, với mọi điểm N (khác M) thuộc tia Ix ta có $\widehat{AMB} > \widehat{ANB}$.

Bây giờ cần so sánh $\widehat{AMB}$ với $\widehat{AM'B}$ để chọn ra góc nào lớn hơn. Có hai trường hợp:

- Nếu R ≠ R', chẳng hạn R > R' (h.83a) thì OA > O'A nên $\widehat{AO'O} > \widehat{AOO'}$. Ta lại có $\widehat{AO'O} = \widehat{AM'B}$, $\widehat{AOO'} = \widehat{AMB}$. Do đó $\widehat{AM'B} > \widehat{AMB}$. Điểm M' là nghiệm hình của bài toán cực trị, đó là tiếp điểm trên xy của đường tròn (O') có bán kính nhỏ hơn.

- Nếu R = R' (h.83b) thì ΔAOO' cân (khi đó AB ⊥ xy), ta có $\widehat{AO'O} = \widehat{AOO'}$ nên $\widehat{AM'B} = \widehat{AMB}$. Bài toán cực trị có hai nghiệm hình, đó là M và M'.

Tóm lại

Nếu AB // xy, bài toán có một nghiệm hình, đó là tiếp điểm của đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với xy.

Nếu AB ⊥ xy, bài toán có hai nghiệm hình, đó là hai tiếp điểm của hai đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với xy.

Trường hợp còn lại, bài toán có một nghiệm hình, đó là tiếp điểm của đường tròn có bán kính nhỏ hơn qua A, B và tiếp xúc với xy.

BÀI TẬP

307(1). Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về hai phía của d. Dựng đường tròn (O) đi qua A, B sao cho nó cắt d thành một dây có độ dài nhỏ nhất.

Scanned with CamScanner

308(1). Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn, điểm D thuộc cạnh BC. Gọi E, F theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD. Tìm vị trí của điểm D để tam giác AEF có diện tích nhỏ nhất.

309 (1). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Tìm vị trí của điểm M thuộc cung AB sao cho tổng MA + MB + MC có giá trị lớn nhất.

310(1). Cho tam giác đều ABC cạnh a, điểm M nằm giữa B và C. Đường tròn (O) đường kính AM cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài DE.

311(1). Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O;R) có OM = 2R. Gọi AB là đường kính thay đổi vị trí. Đường tròn đi qua M, A, B cắt MO ở C. Tìm vị trí của AB để tứ giác MACB có diện tích lớn nhất.

312*(1). Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, dây CD. Tìm điểm M thuộc cung CD sao cho các tia MA, MB cắt dây CD ở I, K và IK có độ dài lớn nhất.

313(2). Cho đường tròn (O;R), đường kính AB, đường tròn (I) tiếp xúc trong với (O) tại C và tiếp xúc với AB tại D. Gọi K là giao điểm của CD với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $\overset{\frown}{KA} = \overset{\frown}{KB}$.

b) Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của CA và CB với đường tròn (I). Gọi E là giao điểm của MD và KB, F là giao điểm của ND và KA. Chứng minh rằng DEKF là hình chữ nhật.

c) Tìm vị trí của điểm D để hình chữ nhật DEKF có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

314(3). Cho đường tròn (O) và dây BC không đi qua O. Điểm A di chuyển trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm vị trí của điểm A để tổng HA + HB + HC có giá trị lớn nhất.

315(3). Cho đường tròn (O) và dây AB. Tìm điểm C thuộc cung nhỏ AB sao cho tổng $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}$ có giá trị nhỏ nhất.

316 (3). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm điểm M thuộc cung BC sao cho nếu gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, BC, AC, thì tổng

MA + MB + MC + MH + MI + MK có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

317 (3). Cho tam giác đều ABC. Vẽ các tia Bx, Cy cùng phía với A đối với BC sao cho Bx // AC, Cy // AB. Một đường thẳng d đi qua A cắt Bx, Cy theo thứ tự ở D, E. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác BIC có chu vi lớn nhất.

318(3). Tìm chu vi lớn nhất của tam giác ABC có BC = a và $\widehat{A} \geq 60^{\circ}$.

319(3). Cho tam giác ABC vuông cân có AB = AC = 10cm.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số tam giác vuông cân DEF ngoại tiếp tam giác ABC (mỗi cạnh của ΔDEF đi qua một đỉnh của ΔABC).

b) Tính diện tích lớn nhất của tam giác DEF.

Scanned with CamScanner

320*(3). Cho tam giác ABC. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên các tia BA, CA sao cho BD = CE.

a) Vẽ hình bình hành BDEM. Tìm quỹ tích các điểm M.

b) Tìm vị trí của các điểm D, E sao cho độ dài DE nhỏ nhất.

321(3). Cho đường tròn (O), M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB, điểm C chuyển động trên cung lớn AB, D là giao điểm của MC và AB.

a) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

b) Tìm vị trí của điểm C để độ dài BI nhỏ nhất.

322(3). Cho đường tròn (O), dây BC, điểm A chính giữa cung BC, điểm M di chuyển trên BC. Gọi D là giao điểm của AM với đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD và CMD. Tìm vị trí của điểm M để tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

323(4). Trong các hình thang có một góc nhọn (α) nội tiếp một đường tròn cho trước, hình nào có diện tích lớn nhất ($\alpha > 45^o$)?

324(4). Cho điểm I nằm trên đoạn thẳng AB (IA < IB). Về cùng một phía của AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn đó. Đường vuông góc với IM tại M cắt Ax, By theo thứ tự tại D, E.

a) Chứng minh rằng tích AD. BE có giá trị không đổi.

b) Tìm vị trí của điểm M để hình thang ABED có diện tích nhỏ nhất.

325(4). Cho đường tròn (O) và dây AB. Điểm M di chuyển trên cung nhỏ AB. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các tiếp tuyến tại A, tại B của đường tròn. Tìm vị trí của M để tích MI. MK có giá trị lớn nhất.

326(4). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M chuyển động trên đường tròn (O). Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AB, AC. Tìm vị trí của điểm M sao cho DE có độ dài lớn nhất.

327(4). Cho tam giác nhọn ABC có BC = a và $\widehat{A} = 60^o$. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác DEF.

328(4). Cho điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN (M nằm giữa A và N). Gọi E là trung điểm của MN, I là giao điểm của CE với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng BI song song với AN.

b) Tìm ví trị của điểm N để tam giác AIN có diện tích lớn nhất.

329(4). Cho đường tròn (O), dây BC không đi qua O.

a) Dựng điểm E thuộc cung BC sao cho EB = 2EC.

b) Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao cho AB + 2AC có giá trị lớn nhất (sử dụng định lí Ptoleme: Bài tập 204).

330*(4). Cho đường tròn tâm O đường kính BC, A là một điểm thuộc đường tròn. H là hình chiếu của A trên BC. Vẽ đường tròn (I) có đường kính AH, cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh rằng OA vuông góc với MN.

Scanned with CamScanner

b) Vẽ đường kính AOK của đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của HK. Chứng minh rằng E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC.

c) Cho BC cố định. Xác định vị trí của điểm A để bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC lớn nhất.

331*(4). Cho tam giác ABC. Điểm M di chuyển trên cạnh BC. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B. Vẽ đường tròn (O_2) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn.

a) Chứng minh rằng điểm N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của điểm M để đoạn thẳng O_1O_2 có độ dài nhỏ nhất.

332(4). Cho đường tròn (O; R) và một điểm I nằm bên trong đường tròn. Gọi AB và CD là hai dây bất kì cùng đi qua I và vuông góc với nhau. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng khi các dây AB, CD thay đổi thì các tổng sau không đổi:

$$OM^2 + ON^2,\ AB^2 + CD^2,\ AC^2 + BD^2.$$

b) Xác định vị trí của AB, CD để hình chữ nhật OMIN có diện tích lớn nhất; có chu vi lớn nhất.

c) Xác định vị trí của AB, CD để tổng AB + CD lớn nhất, nhỏ nhất.

d) Xác định vị trí của AB, CD để tứ giác ACBD có diện tích lớn nhất; nhỏ nhất.

333(4). Cho đường tròn (O) đường kính AB, đường thẳng d không giao với đường tròn. Dựng điểm M thuộc d sao cho các tia MA, MB cắt đường tròn ở D, E và độ dài DE nhỏ nhất.

334(4). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, I là trung điểm của OA, điểm E nằm trên nửa đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến Ax và By cùng phía với E đối với AB. Đường vuông góc với IE tại E cắt Ax và By theo thứ tự ở H và K. Xác định vị trí của các điểm H và K để tam giác HIK có diện tích nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

335(4). Cho tam giác nhọn ABC ($AC \geq AB$), các đường cao AD, BE, CF.

Chứng minh rằng:

a) $CE \geq BF$;

b) $BC^2 = BA \cdot BF + CA \cdot CE$;

c*) $DE + DF \leq BC$, từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của tổng DE + DF khi BC = a (không đổi).

336(5). Cho đường tròn (O;r). Tính diện tích nhỏ nhất của hình thang cân ngoại tiếp đường tròn đó.

337(6). Tìm điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của một lục giác đều cho trước là nhỏ nhất.

338 (5). a) Tính diện tích lớn nhất của một tam giác vuông có chu vi bằng 2a.

b) Cho đường tròn (O;R) và hai hình vuông nội tiếp đường tròn đó, phân hai hình vuông chồng lên nhau tạo thành một bát giác. Tính diện tích nhỏ nhất của bát giác đó.

Scanned with CamScanner

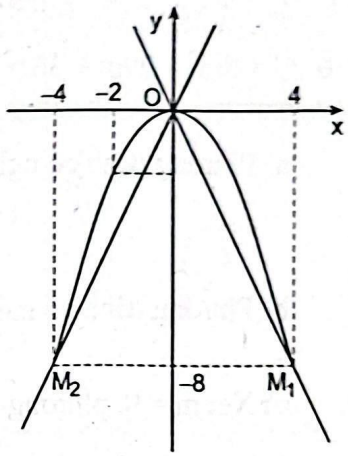
LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

Chương IV. HÀM SỐ $y = ax^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. Hàm số $y = ax^2$

1. Parabol $y = ax^2$ đi qua B(2; 1) nên $1 = a.2^2$, do đó $a = \frac{1}{4}$.

Phương trình của parabol là $y = \frac{1}{4}x^2$.



Hình 84

2. $y = -\frac{2}{3}x^2$.

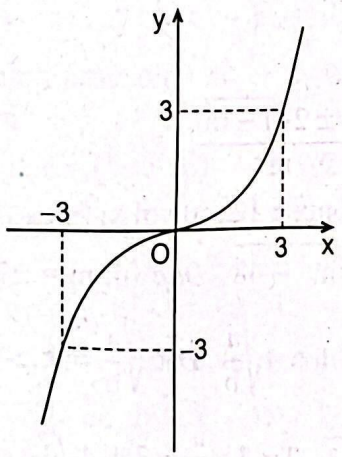
3. (h.84) a) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b) Quỹ tích các điểm M có khoảng cách đến trục hoành gấp đôi khoảng cách đến trục tung là hai đường thẳng $y = 2x$ và $y = -2x$.

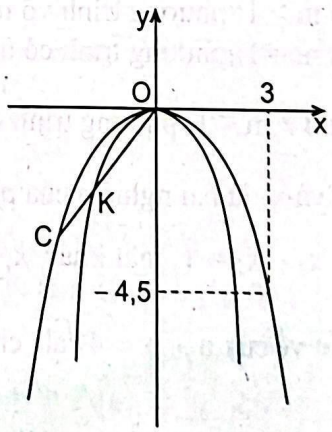
Giải hai hệ: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ và $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = -2x. \end{cases}$

Vậy có ba điểm phải tìm là; (0; 0), (4; –8); (–4; –8).

4. (h.85) $y = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x^2 & \text{với } x < 0. \end{cases}$



Hình 85



Hình 86

Scanned with CamScanner

5. a) Xem hình 86.

b) Gọi toạ độ của điểm C là (m; n). Điểm C thuộc parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ nên

$$n = -\frac{1}{2}m^2 \qquad (1)$$

Gọi toạ độ của điểm K là (x; y), ta cần biểu thị y theo x.

K là trung điểm của OC nên $x = \frac{m}{2}$, $y = \frac{n}{2}$. Suy ra $m = 2x$, $n = 2y$. Thay vào (1) ta được $2y = -\frac{1}{2}(2x)^2 = -2x^2$. Do đó $y = -x^2$. Điểm K di chuyển trên parabol $y = -x^2$.

§2. Phương trình bậc hai một ẩn

6. $\Delta' = 5m^2 - 29m + 36 = (m - 4)(5m - 9)$.

a) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = \frac{9}{5} \end{array}\right.$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < \frac{9}{5} (m \neq 0) \end{array}\right.$.

c) Xét $m = 0$, phương trình có nghiệm.

Xét $m \neq 0$, phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5} < m < 4$.

Vậy nếu $\frac{9}{5} < m < 4$ thì phương trình vô nghiệm.

7. a) $\Delta = (m + 6)^2$.

Nếu $m = -6$, phương trình có nghiệm kép $x = -3$.

Nếu $m \neq -6$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $m + 3$ và -3.

b) Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Với $m \neq 0$, phương trình là bậc hai, $\Delta' = 4(1 - m)$.

– Nếu $m > 1$: phương trình vô nghiệm.

– Nếu $m = 1$: phương trình có nghiệm kép $x = 2$.

– Nếu $0 \neq m < 1$: phương trình có hai nghiệm $\frac{2 \pm 2\sqrt{1 - m}}{m}$.

8. Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 12 = 0$ với $x_1 > x_2$.

Ta có $x_1 - x_2 = 1$, mặt khác $x_1 - x_2 = \sqrt{\Delta} = \sqrt{m^2 - 48}$. *Đáp số*: $m = \pm 7$.

9. Chia hai vế của $a + b = 4\sqrt{ab}$ cho b, ta được $\frac{a}{b} + 1 = 4\sqrt{\frac{a}{b}}$. Đặt $\sqrt{\frac{a}{b}} = k > 0$.

Giải phương trình $k^2 + 1 = 4k$ được $k = 2 \pm \sqrt{3}$. Từ đó $\frac{a}{b} = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

Scanned with CamScanner

10. *Cách 1.* $(x-1)^2+(x-y+1)^2=0$; $x=1, y=2$.

Cách 2. Coi y là tham số của phương trình bậc hai có ẩn là x:

$2x^2-2yx+(y^2-2y+2)=0$; $\Delta'=-(y-2)^2$.

Để tồn tại x, phải có $\Delta'\geq 0$, tức là $y=2$. Khi đó $x=1$.

Cách 3. Coi x là tham số của phương trình bậc hai có ẩn là y.

11. Ta có $x=\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)}$. (1)

$x=\dfrac{b(c-a)}{c(b-a)}\Rightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{c(b-a)}{b(c-a)}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a(b-c)-c(b-a)}{b(c-a)}=\dfrac{b(a-c)}{b(c-a)}=-1$.

Suy ra $x+1-\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^2+x-1=0$.

Nghiệm dương của phương trình là $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

12. a) Với $m=0$, phương trình vô nghiệm.

Với $m=1$, phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}$.

Với $m\neq 0$, $m\neq 1$, phương trình là bậc hai, nó có nghiệm nếu $\Delta'\geq 0$, tức là $m\geq 0$. Do đó phải có $m>0$.

Kết luận: Với $m>0$ thì phương trình có nghiệm.

b) *Đáp số*: $-\sqrt{2}\leq m\leq\sqrt{2}$.

13. a) $\Delta'=a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}\geq 0$; b) $\Delta=6(a^2+b^2)+3(a-b)^2\geq 0$.

14. a) b) $\Delta'=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0$.

15. $\Delta'_1=b^2-ac$, $\Delta'_2=c^2-ba$, $\Delta'_3=a^2-cb$.

Chứng minh rằng $\Delta'_1+\Delta'_2+\Delta'_3\geq 0$ nên tồn tại một trong các biểu thức Δ_1, Δ_2, Δ_3 không âm.

16. $\Delta=b^2-4ac=(5a+2c)^2-4ac=25a^2+16ac+4c^2=(2c+4a)^2+9a^2\geq 0$.

17. Trường hợp $a^2+b^2-c^2\neq 0$, tính được

$$\Delta=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)>0.$$

Trường hợp $a^2+b^2-c^2=0$ thì $x=0$ (trường hợp này tam giác vuông tại C).

18. Nếu $ac\leq 0$, hiển nhiên phương trình có nghiệm.

Nếu $ac>0$: Ta có $2b\geq c+4a\geq 2\sqrt{4ac}=4\sqrt{ac}\Rightarrow b\geq 2\sqrt{ac}\Rightarrow b^2\geq 4ac$.

Vậy phương trình có nghiệm.

Scanned with CamScanner

19. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm thì

$b^2 < 4c$, $m^2 < 4n$, do đó $c > 0$, $n > 0$ và $b^2m^2 < 16cn = 4.4cn \le 4.(c + n)^2$. (1)

Mặt khác, theo giả thiết $bm = 2(c + n)$ nên $b^2m^2 = 4(c + n)^2$, (2)

mâu thuẫn với (1). Vậy ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

20. $\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2$.

Nghiệm của phương trình là $\dfrac{-b \pm (a - c)}{2}$, đó là số hữu tỉ.

21. a) Giả sử a, b, c là các số nguyên lẻ. Do $a \neq 0$ nên phương trình là bậc hai.

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta sẽ chứng minh rằng Δ không là số chính phương.

Do a, b, c lẻ nên $b^2 = 8A + 1$, còn $ac = 2B + 1$ (với A, B nguyên), do đó

$\Delta = (8A + 1) - 4(2B + 1) = 8A - 8B - 3$,

không là số chính phương (vì số chính phương lẻ chia cho 8 phải dư 1).

b) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ thì $\Delta = b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 ($m \in N$).

Xét $4a \cdot \overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac$

$= (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2 = (20a + b + m)(20a + b - m)$.

Tồn tại một trong hai thừa số $20a + b + m$, $20a + b - m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$

Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$) nên:

$$20a + b - m \le 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}$$

22. Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 2$.

Với $m \neq 0$, ta phải có $\Delta' = 2m + 1$ là số chính phương, tức là $2m + 1 = (2k + 1)^2$ ($k \in N^*$).

Suy ra $m = 2k(k + 1)$.

Gộp cả trường hợp $m = 0$, ta có các giá trị phải tìm của m là $2k(k + 1)$ với mọi $k \in N$.

23. Ta có $\Delta = (n + 4)^2 - 4(4n - 25) = n^2 - 8n + 116 > 0$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có nghiệm nguyên là: $n^2 - 8n + 116$ là số chính phương.

Đặt $n^2 - 8n + 116 = k^2$ ($k \in N$), dẫn đến $(n - 4 + k)(n - 4 - k) = -100$.

Chú ý rằng $n - 4 + k$ và $n - 4 - k$ cùng chẵn, $n - 4 + k \ge n - 4 - k$ nên:

$n - 4 + k$	50	2	10
$n - 4 - k$	–2	–50	–10
k	26	26	10
$n - 4$	24	–24	0
n	28	–20	4

Với $n = 28$, phương trình đã cho là $x^2 - 32x + 87 = 0$, có các nghiệm là 3 và 29.

Scanned with CamScanner

Với n = –20, phương trình đã cho là $x^2 + 16x - 105 = 0$, có các nghiệm là –21 và 5.

Với n = 4, phương trình đã cho là $x^2 - 8x - 9 = 0$, có các nghiệm là –1 và 9.

Vậy $n \in \{-20; 4; 28\}$.

24. Phương trình $x^2 + px - 12p = 0$ có $\Delta = p^2 + 48p$.

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên là: Δ là số chính phương $\Leftrightarrow p(p + 48)$ là số chính phương $\Leftrightarrow p + 48 \vdots p \Leftrightarrow 48 \vdots p$.

Ước nguyên tố của 48 là 2 và 3.

Với p = 2 thì $\Delta = 100 = 10^2$. Hai nghiệm của phương trình là 4 và –6.

Với p = 3 thì $\Delta = 153$, không phải là số chính phương, loại.

Vậy p = 2.

25. Ta có $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}$ là phân số tối giản nên $b - c = 1$ và $bc = a$.

Thay $b = c + 1$ vào $bc = a$ được $c(c+1) = a \Leftrightarrow c^2 + c - a = 0$.

Do c và a là số nguyên dương nên $\Delta = 1 + 4a$ là số chính phương.

Đặt $1 + 4a = k^2$ (k lẻ) ta được $c = \frac{-1+k}{2}$, $b = \frac{k+1}{2}$.

Vậy $a + b = \frac{k^2-1}{2} + \frac{k+1}{2} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$ là số chính phương (chú ý, k + 1 là số chẵn).

26. Gọi m là nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$ thì $m^2 - 2am + b = 0$ nên $m^2 - 2am + a^2 = a^2 - b$, suy ra $a^2 - b = (m - a)^2$, là số chính phương. Tương tự $b^2 - c$ và $c^2 - a$ là số chính phương.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Nếu $a > 1$ thì $a^2 - b < a^2$. Ta lại có $a^2 - b > (a-1)^2$.

Thật vậy $a^2 - b - (a-1)^2 = a^2 - b - a^2 + 2a - 1 = (a - b) + (a - 1) > 0$.

Suy ra $(a-1)^2 < a^2 - b < a^2$, vô lí.

Vậy a = 1 nên a = b = c = 1. Thử lại, ba phương trình có nghiệm x = 1.

27. a) Gọi x_0 là nghiệm chung. Ta có $x_0^2 + 2x_0 + m = 0$, $x_0^2 + mx_0 + 2 = 0$, suy ra

$$(m - 2)x_0 = m - 2,$$

Nếu m = 2 thì cả hai phương trình đều là $x^2 + 2x + 2 = 0$ nên cùng vô nghiệm.

Nếu $m \neq 2$ thì $x_0 = 1$. Từ đó m = –3.

Với m = –3, phương trình đầu là $x^2 + 2x - 3 = 0$, có nghiệm 1 và –3; phương trình sau là $x^2 - 3x + 2 = 0$, có nghiệm 1 và 2.

Kết luận: m = –3.

b) m = 2.

Scanned with CamScanner

28. a) $m = -2$.

b) Với $m = 4$, phương trình đầu có nghiệm 1 và $-\frac{9}{2}$; phương trình sau có nghiệm 1 và $-\frac{19}{6}$.

Với $m = \frac{8}{3}$, phương trình đầu có nghiệm $\frac{3}{2}$ và -3, phương trình sau có nghiệm $\frac{3}{2}$ và $-\frac{19}{9}$.

Vậy $m = 4$ hoặc $m = \frac{8}{3}$.

29. Gọi x_0 là nghiệm chung. Ta tìm được $(11m - 6)x_0 = 8$.

Do m là số nguyên nên $11m - 6 \neq 0$. Thay $x_0 = \frac{8}{11m - 6}$ vào phương trình (1) được $99m^2 - 164m - 68 = 0$ có nghiệm nguyên là $m = 2$.

Với $m = 2$, phương trình (1) là $2x^2 + 5x - 3 = 0$ có nghiệm là $\frac{1}{2}$ và -3, phương trình (2) là $6x^2 - x - 1 = 0$ có nghiệm là $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{3}$.

30. Giả sử (2) có nghiệm $x = a$, (1) có nghiệm $x = 2a$.

Thay vào các phương trình đã cho, rồi khử m ta được $6a(a - 3) = 0$.

Với $a = 0$ thì $m = 0$, (1) là $2x^2 - 13x = 0$, có nghiệm 0 và $6\frac{1}{2}$; (2) là $x^2 - 4x = 0$, có nghiệm 0 và 4.

Với $a = 3$ thì $m = 3$, (1) là $2x^2 - 13x + 6 = 0$, có nghiệm 6 và $\frac{1}{2}$; (2) là $x^2 - 4x + 3 = 0$, có nghiệm 3 và 1.

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 3$.

31. Do m là nghiệm của (1) nên $am^2 + bm + c = 0$. Chia hai vế cho $m \neq 0$ được

$$a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} = 0 \Rightarrow c\left(\frac{1}{m}\right)^2 + b\left(\frac{1}{m}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{m} \text{ là nghiệm của (2).}$$

Ta chọn $n = \frac{1}{m}$. Dễ dàng chứng minh được $m + n \geq 2$.

§3. Hệ thức Viète và ứng dụng

32. a) Nếu $m = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm 1 và $\frac{m - 2}{m}$.

Scanned with CamScanner

b) Nếu $m = 1$ thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Nếu $m \neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm -1 và $\frac{2}{1-m}$.

33. a) $\Delta > 0, P > 0, S > 0$: hai nghiệm cùng dương. b) $P < 0$: hai nghiệm trái dấu.

c) $\Delta > 0, P > 0, S < 0$: hai nghiệm cùng âm. d) $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

34. $\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 32 > 0 \Rightarrow |m| > 4\sqrt{2}$. Ta có $|x_1 + x_2| = |-m| = |m| > 4\sqrt{2}$.

35. Giải điều kiện: $m - 1 \neq 0, \Delta > 0, P > 0$. *Đáp số*: $1 < m < \frac{4}{3}$.

36. Gọi hai nghiệm nguyên tố của phương trình $x^2 - 45x + a = 0$ là m và n.

Ta có $m + n = 45$ và $mn = a$.

Hai số nguyên tố có tổng bằng 45 nên phải có một số là 2, chẳng hạn $m = 2$.

Vậy $n = 43$. Khi đó $a = 86$.

37. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo hệ thức Viète:

$x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = n$. Do n là số nguyên tố nên $x_1 = 1, x_2 = n$ (giả sử $x_1 < x_2$).

Từ $x_1 + x_2 = m$ suy ra $1 + n = m$. Do n và m là hai số nguyên tố liên tiếp nên $n = 2, m = 3$.

Khi đó phương trình là $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm 1 và 2.

38. Dễ thấy $\Delta > 0$ nên phương trình có nghiệm. Ta có $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1x_2 = -\frac{5}{2}$.

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{3}{5}$.

b) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{49}{4}$.

c) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{5}{2}\right).\frac{3}{2} = \frac{117}{8}$.

39. Ta phải có: $\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ x_1x_2 \neq 0 & (2) \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5} & (3) \end{cases}$

Giải (1) được $m < \frac{7}{6}$. Giải (2) được $m \neq 1$ và $m \neq -3$.

Giải (3) được $\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} - \frac{x_1 + x_2}{5} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{5}\right) = 0$.

– Trường hợp $x_1 + x_2 = 0$ cho ta $m = 2$, trái với (1).

– Trường hợp $x_1x_2 = 5$ cho ta

$m^2 + 2m - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 4) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (loại), $m = -4$.

Đáp số: $m = -4$.

Scanned with CamScanner

40. $\Delta' = m^2 - (4m - 1) = m^2 - 4m + 1$.

Giả sử $\Delta' > 0$. Ta có

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2 - 4(4m - 1) = 4(m^2 - 4m + 1)$.

Giải $x_1 - x_2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 = 1$

$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 4$, đều thoả mãn $\Delta' > 0$.

41. $\Delta = m^2 - 4(-3) = m^2 + 12 > 0$.

$\sqrt{-x_1} = \sqrt{3x_2}$ nên $-x_1 = 3x_2$ và $x_1 \le 0$, $x_2 \ge 0$.

Ta có $x_1x_2 = -3$ nên $-3x_2^2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = 1$. Do $x_2 \ge 0$ nên $x_2 = 1$; $x_1 = -3$.

Ta có $x_1 + x_2 = -m$ nên $m = -(x_1 + x_2) = -(1 - 3) = 2$.

42. Từ $x_1 + x_2 = -m$, $x_1x_2 = n$, $3m^2 = 16n$ suy ra

$3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 3x_2)(3x_1 - x_2) = 0$.

Suy ra $x_1 = 3x_2$ hoặc $x_2 = 3x_1$.

43. Khử m từ $x_1 + x_2 = m + 2$ và $x_1x_2 = 2m - 1$ ta được $x_1x_2 = 2(x_1 + x_2 - 2) - 1$.

Do đó $2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5$.

44. a) Giải phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. *Đáp số*: $1 + \sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$.

b) Giải phương trình $x^2 - x + 5 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

45. a) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$; b) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

46. $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 4 - 2 = 2$.

$y + \dfrac{1}{y} = 3 \Rightarrow \left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 9 \Rightarrow y^2 + \dfrac{1}{y^2} = 9 - 2 = 7$.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = a + \left(xy + \frac{1}{xy}\right). \qquad (1)$$

Đặt $xy + \dfrac{1}{xy} = b$, từ (1) suy ra $2 \cdot 3 = a + b$ hay $a + b = 6$.

Ta lại có $ab = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)\left(xy + \dfrac{1}{xy}\right) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) = 2 + 7 = 9$.

Hai số a và b có tổng bằng 6 và tích bằng 9 nên là các nghiệm của phương trình $X^2 - 6X + 9 = 0 \Leftrightarrow X = 3$.

Vậy $a = 3$.

Lưu ý. Nếu tính giá trị của x, ta có

$x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó $a = \dfrac{1}{y} + y = 3$.

Scanned with CamScanner

47. a) $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = -4+\sqrt{15}$. Chọn $x_2 = -4-\sqrt{15}$.

Ta có $x_1 + x_2 = -8$, $x_1x_2 = 1$ nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 8x + 1 = 0$.

b) $x_1 = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = -5-2\sqrt{6}$. Chọn $x_2 = -5+2\sqrt{6}$. *Đáp số*: $x^2 + 10x + 1 = 0$.

c) Trước hết lập phương trình bậc hai nhận $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ làm một nghiệm. Chọn nghiệm kia là $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$. *Đáp số*: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

48. a) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập.

Cách 1. Tính x_1, x_2, từ đó tính y_1, y_2.

Cách 2. Tính $x_1 + x_2$, x_1x_2, từ đó tính $y_1 + y_2$, y_1y_2.

Vậy phương trình phải lập là $y^2 - 6y + 1 = 0$.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$.

Ta có $x_1 + x_2 = -m$, $x_1x_2 = -2$.

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập. Ta tính được

$y_1 + y_2 = \dfrac{m}{2}$, $y_1y_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình phải lập là $2y^2 - my - 1 = 0$.

49. Điều kiện: $m^2 - 4n \geq 0$. Ta có $m + n = -m$ (1) và $mn = n$ (2)

Giải (2) được $n = 0$ hoặc $m = 1$. Sử dụng (1) để giải tiếp.

Đáp số: $m = 0$, $n = 0$, phương trình là $x^2 = 0$;

$m = 1$, $n = -2$, phương trình là $x^2 + x - 2 = 0$.

50. a) Chẳng hạn $A(x) = 2x$ và $B(x) = x$ thì $\dfrac{A\left(\sqrt{2}+1\right)}{B\left(\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1} = 2$.

b) Đặt $m = \sqrt{2}+1$. Cần chỉ ra các đa thức $A(x)$ và $B(x)$ có hệ số nguyên sao cho $\dfrac{A(m)}{B(m)} = \sqrt{2}$.

Trước hết ta tìm phương trình bậc hai có hai nghiệm là $m = \sqrt{2}+1$ và $n = \sqrt{2}-1$.

Do $m + n = 2\sqrt{2}$ và $mn = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$ nên m (và n) là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$. Suy ra $x^2 + 1 = 2\sqrt{2}x$ nên $\dfrac{x^2+1}{2x} = \sqrt{2}$.

Vậy ta chọn $A(x) = x^2 + 1$ và $B(x) = 2x$ thì $\dfrac{A(m)}{B(m)} = \dfrac{m^2+1}{2m} = \sqrt{2}$.

51. a) Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Ta có

$$x_0^2 + ax_0 + bc = 0;\ x_0^2 + bx_0 + ca = 0.$$

Scanned with CamScanner

Suy ra $(a - b)x_0 = c(a - b)$. Do $a \neq b$ nên $x_0 = c$.

Gọi nghiệm còn lại của (1) và (2) theo thứ tự là x_1, x_2.

Theo hệ thức Viète: $x_0x_1 = bc$, $x_0x_2 = ca$. Do $x_0 = c \neq 0$ nên $x_1 = b$, $x_2 = a$.

Nghiệm còn lại của (1) là b, nghiệm còn lại của (2) là a.

b) Do b, c là nghiệm của (1) nên $b + c = -a$, suy ra $a + b = -c$.

Vậy a và b là các nghiệm của phương trình $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ hay $x^2 + cx + ab = 0$.

52. Các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm nên $a, c \neq 0$.

Ta có $m^2 + n^2 \geq 2|m.n| = 2\left|\frac{c}{a}\right|$, $p^2 + q^2 \geq 2|p.q| = 2\left|\frac{a}{c}\right|$.

Suy ra $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 2\left(\left|\frac{c}{a}\right| + \left|\frac{a}{c}\right|\right) \geq 2.2 = 4$.

53. Các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm nên $a, c \neq 0$. Do đó các nghiệm của (1) và (2) đều khác 0.

Gọi m là nghiệm của (1), ta có $am^2 + bm + c = 0$

$\Rightarrow a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} = 0 \Rightarrow c\left(\frac{1}{m}\right)^2 + b\left(\frac{1}{m}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{m}$ là nghiệm của (2).

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_3 = \frac{1}{x_1}$, $x_4 = \frac{1}{x_2}$.

Dễ dàng chứng minh được $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^4 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 4$.

Theo đề bài, xảy ra đẳng thức, do đó $x_1^2 = \frac{1}{x_1^2}$, $x_2^2 = \frac{1}{x_2^2}$, tức là $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$.

Xét ba trường hợp:

a) (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.

Theo hệ thức Viète: $-\frac{b}{a} = 2$, $\frac{c}{a} = 1$ nên $c = a$, $b = -2a$.

b) (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$. Bạn đọc tự tính được: $c = a$, $b = 2a$.

c) (1) có nghiệm 1 và -1. Bạn đọc tự tính được: $b = 0$, $c = -a$.

54. Theo giả thiết, $x_3 = x_1 + 1$, $x_4 = x_2 + 1$. Theo hệ thức Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b & (1) \\ x_1x_2 = c & (2) \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = b^2 & (3) \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = bc & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3): $b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b - 1)(b + 2) = 0 \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = -2$.

Từ (4): $x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = bc$. Do đó $c - b + 1 = bc$. (5)

Scanned with CamScanner

Với b = 1, (5) luôn đúng. Khi đó phương trình $x^2 + bx + c = 0$ trở thành $x^2 + x + c = 0$, có nghiệm nếu $\Delta = 1 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{4}$; phương trình $x^2 - b^2x + bc = 0$ trở thành $x^2 - x + c = 0$, cũng có nghiệm nếu $c \leq \frac{1}{4}$.

Với b = –2, (5) trở thành $c + 3 = -2c \Rightarrow c = -1$. Khi đó phương trình $x^2 + bx + c = 0$ trở thành $x^2 - 2x - 1 = 0$, có nghiệm $1 \pm \sqrt{2}$; phương trình $x^2 - b^2x + bc = 0$ trở thành $x^2 - 4x + 2 = 0$, có nghiệm $2 \pm \sqrt{2}$.

Kết luận: $b = 1, c \leq \frac{1}{4}$; $b = -2, c = -1$.

55. Gọi nghiệm chung của hai phương trình là m, ta có:

$$m^2 + am + 6 = 0 \text{ và } m^2 + bm + 12 = 0.$$

Suy ra $2m^2 + (a + b)m + 18 = 0$. (1)

Để tồn tại m thì (1) phải có nghiệm, tức là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow |a + b| \geq 12$.

Ta có $|a| + |b| \geq |a + b| \geq 12$.

$$\min (|a| + |b|) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ |a + b| = 12. \end{cases}$$

Với a + b = 12, (1) là $m^2 + 6m + 9 = 0$, có nghiệm m = –3.

Dễ dàng tính được a = 5, b = 7.

Với a + b = –12, (1) là $m^2 - 6m + 9 = 0$, có nghiệm m = 3.

Dễ dàng tính được a = –5, b = –7.

56. a) Bạn đọc tự tính được $s_1 = 6$, $s_2 = 34$, $s_3 = 198$.

b) $s_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^n + x_2^n) = 6s_{n+1} - s_n$.

c) Từ $s_1 = 6$, $s_2 = 34$ và $s_{n+2} = 6s_{n+1} - s_n$ suy ra s_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n.

d) Theo câu b ta có $s_{n+2} = 6s_{n+1} - s_n$. Chứng minh tương tự $s_{n+3} = 6s_{n+2} - s_{n+1}$. Do đó $s_{n+3} = 6(6s_{n+1} - s_n) - s_{n+1} = 35s_{n+1} - 5s_n - s_n$.

Suy ra $s_n + s_{n+3} \vdots 5$, tương tự $s_{n+3} + s_{n+6} \vdots 5$. Do đó s_n và s_{n+6} có cùng số dư khi chia cho 5. Như vậy s_{50} và s_2 có cùng số dư khi chia cho 5.

Do s_2 chia cho 5 dư 4 nên s_{50} chia cho 5 dư 4.

§4. Phương trình quy về phương trình bậc hai

57. a) $(x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$. *Đáp số*: $1; 1 \pm \sqrt{2}$.

b) $(x + 1)(x^2 - 6x + 7) = 0$. *Đáp số*: $-1; 3 \pm \sqrt{2}$.

c) $x^3 - 3\sqrt{3} + 2x - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 5) = 0$. *Đáp số*: $\sqrt{3}$.

d) $x^3 - 2\sqrt{2} - x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} + 1) = 0$. *Đáp số*: $\sqrt{2}$.

e) 2x – 1 là nhân tử chung của hai vế. *Đáp số*: $\frac{1}{2}; 1; -2$.

Scanned with CamScanner

58. a) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ ta được $y^2 - 3y + 2 = 0$. *Đáp số:* $x = 1$.

b) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ ta được $(y - 1)(3y - 10) = 0$. *Đáp số:* $\frac{1}{3}$; 3.

c) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ ta được $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -\frac{10}{3}$. *Đáp số:* 2; $\frac{1}{2}$; -3 ; $-\frac{1}{3}$.

d) *Đáp số:* -1.

e) Chia hai vế cho x^2. *Đáp số:* 1; 2; $\frac{1}{2}$.

59. Các phương trình trong bài là phương trình đối xứng bậc bốn.

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$ ($|y| \geq 2$) hoặc phân tích vế trái thành tích của hai đa thức bậc hai.

a) Đưa về $y^2 - 2y - 3 = 0$; $y = -1$ loại; $y = 3$ cho $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) $3 \pm \sqrt{8}$; $2 \pm \sqrt{3}$;

c) 1; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

d) 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$;

e) $2 \pm \sqrt{3}$; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

g) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $-2 \pm \sqrt{3}$.

60. Các phương trình trong bài là phương trình hồi quy.

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt $y = x - \frac{1}{x}$ hoặc phân tích vế trái thành tích của hai đa thức bậc hai.

a) 2; $-\frac{1}{2}$; -3; $\frac{1}{3}$;

b) -2; $\frac{1}{2}$; -3; $\frac{1}{3}$.

c) $y^2 - 3y - 4 = 0$. Với $y = -1$ ta được $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Với $y = 4$ ta được $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

d) $1 \pm \sqrt{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

e) $1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

61. a) Phương trình đối xứng bậc năm. Biến đổi phương trình thành

$(x + 1)(6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6) = 0$. *Đáp số::* -1; 2; $\frac{1}{2}$.

b) Chia hai vế cho x^2. *Đáp số*: 3; -1; $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

c) Chia hai vế cho x^2 được $\left(x - 6 - \frac{9}{x}\right)^2 = x - 4 - \frac{9}{x}$.

Đặt $x - 5 - \frac{9}{x} = y$, được $y = 0$, $y = 3$. *Đáp số*: 9; -1; $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$.

Scanned with CamScanner

62. a) Chia hai vế cho x^2 rồi đặt $x + \frac{4}{x} = y$, được $y = 4$, $y = -5$. *Đáp số:* 2; −1; −4.

b) Chia hai vế cho x^2 rồi đặt $2x + \frac{1}{x} = y$. *Đáp số:* $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

63. a) Đặt $x\sqrt{2} = y$ được $(2y - 1)(y^2 - 5y + 6) = 0$. *Đáp số:* $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt $x\sqrt{2} = y$ được $(y + 6)(y - 2)^3 = 0$. *Đáp số:* $\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$.

64. a) $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 8$. Đặt ẩn phụ $y = x^2 + 3x + 1$. Tìm được $y = \pm 3$.

Đáp số: $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

b) $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. c) Đặt $x^2 - 5x - 19 = 9$, được $y = \pm 13$. *Đáp số:* 6; −1; $\frac{5 \pm \sqrt{153}}{2}$.

d) Đặt $x^2 + 14x + 45 = y$, được $y = 5$, $y = -8$. *Đáp số:* −10; −4.

e) $(4x + 3)^2(4x + 4)(4x + 2) = 810.8$.

Đặt $y = 4x + 3$, dẫn tới $y^4 - y^2 - 6480 = 0$. Tìm được $y = \pm 9$. *Đáp số:* $\frac{3}{2}$; −3.

g) $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6}$.

65. a) Đặt $x^2 - x = y$, đưa về $(4y + 1)(y - 2)^2 = 0$. *Đáp số:* −1; 2; $\frac{1}{2}$.

b) Phương trình có dạng $9(x + 5)(x + 6)(x + 7) = 24x$, trong đó $\frac{5 + 6 + 7}{2} = 9$, và $(9 - 5)(9 - 6)(9 - 7) = 24$. Đặt $y = x + 9$. Đưa về $y(3y^2 - 27y + 70) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Đáp số: $x = -9$.

Cách khác: Đặt $x + 6 = y$.

66. a) Đặt $x - 3 = y$ được $(y - 1)(y^2 + y + 4) = 0$. *Đáp số:* 4.

b) Đặt $x + 3 = y$ được $(y^2 - 4)(y^2 + 10) = 0$. *Đáp số:* −1; −5.

c) Đặt $x + 5 = y$, được $y = \pm 1$. *Đáp số:* −4; −6.

d) Đặt $x - 3 = y$ được $y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0$.

Đặt $y^2 = z \geq 0$ được $(z - 1)(z^2 + 16z + 31) = 0$. Chú ý rằng phương trình $z^2 + 16z + 31 = 0$ vô nghiệm vì $z \geq 0$. *Đáp số:* $x = 2$, $x = 4$.

67. a) $(x^2 - 6x)^2 - 81 = 2(x - 3)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9)(x^2 - 6x - 9) = 2(x - 3)^2$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2(x^2 - 6x - 11) = 0$. *Đáp số:* 3; $3 \pm 2\sqrt{5}$.

b) $x^4 + (x - 1)(3x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2(x - 1) + 2(x - 1)^2 = 0$.

Cách 1. Đặt $x^2 = y$, $x - 1 = z$ ta có $y^2 + 3yz + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow (y + 3)(y + 2z) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$. *Đáp số:* $-1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Scanned with CamScanner

Cách 2. Chia hai vế cho $(x-1)^2 \neq 0$ được

$\frac{x^4}{(x-1)^2} + \frac{3x^2}{x-1} + 2 = 0$. Đặt $\frac{x^2}{x-1} = y$ ta có $y^2 + 3y + 2 = 0$.

c) *Cách 1.* $x^4 + 5x^2(x+1) - 6(x+1)^2 = 0$.

Đặt $x^2 = y$, $x + 1 = z$ được $(y - z)(y + 6z) = 0$. *Đáp số:* $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $-3 \pm \sqrt{3}$.

Cách 2. Chia hai vế cho $(x+1)^2 \neq 0$.

d) *Cách 1.* $(x^2 + 1)^2 + (x + 2)[3(x^2 + 1) - 4(x + 2)] = 0$.

Đặt $x^2 + 1 = y$, $x + 2 = z$ được $(y - z)(y + 4z) = 0$. *Đáp số:* $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cách 2. $(x^2 + 1)^2 + 3(x + 2)(x^2 + 1) - 4(x + 2)^2 = 0$. Chia hai vế cho $(x+2)^2 \neq 0$.

e) Chia hai vế cho $(x+1)^2 \neq 0$ được $\left[\frac{x(x-1)}{x+1}\right]^2 + \frac{x(x-1)}{x+1} - 2 = 0$.

Đặt $\frac{x(x-1)}{x+1} = y$ có $y^2 + y - 2 = 0$ được $y_1 = 1$, $y_2 = -2$

Với $y = 1$ được $x = 1 \pm \sqrt{2}$, với $y = -2$ vô nghiệm.

68. a) Biến đổi phương trình (1) thành:

$$(x^2 + 1)^2 - x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 1 - x) = 0.$$

Cả hai nhân tử ở vế trái đều dương. *Kết luận*: $S = \varnothing$.

b) Đưa phương trình về dạng $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 0$.

c) $x^4 + 2x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 0$.

Phương trình vô nghiệm.

69. Chú ý rằng phương trình có nghiệm -1. Biến đổi:

$x^2(x^3 - 1) + 2(x^2 + x + 1) = 0$, đưa về $(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$. *Đáp số:* -1.

b) Đặt $x - 4 = y$, đưa về $y^4 + 2y^2 - 3 = 0$. *Đáp số:* 3; 5.

70. a) $x^4 = (x - 1)^2$. *Đáp số:* $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. b) $x^4 = (3x - 4)^2$. *Đáp số*: 1; -4.

c) Cộng $2x^2 + 1$ vào hai vế. *Đáp số:* $1 \pm \sqrt{2}$. d) Cộng $64x^2$ vào hai vế. *Đáp số:* 3; 5.

e) Cộng $4a^2x^2$ vào hai vế. *Đáp số:* $a \pm 1$. g) Cộng $4x^2 + 4$ vào hai vế. *Đáp số:* 1.

h) Cộng $4x^2 + 4$ vào hai vế. *Đáp số:* $1 \pm \sqrt{2}$.

i) Cộng $4x^2 + 4$ vào hai vế. *Đáp số:* $1 \pm \sqrt{3}$.

k) Cộng $2x^2 + 1$ vào hai vế. *Đáp số:* $-1 \pm \sqrt{3}$.

l) Cộng $4x^2$ vào hai vế được $(x^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + 2x) + 12$. *Đáp số:* $-1 + \sqrt{7}$.

Scanned with CamScanner

71. a) Cộng $2x^2 + 1$ vào hai vế. *Đáp số:* $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}\right)$.

b) *Đáp số:* $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{8\sqrt{2} - 2}\right)$.

c) $3x^3 = 9x^2 - 27x + 27 \Leftrightarrow 2x^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27 \Leftrightarrow 2x^3 = (3 - x)^3$.

Đáp số: $x = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}$.

d) $x^3 = x^2 + x + \frac{1}{3}$. Nhân hai vế với 3 rồi cộng thêm x^3. *Đáp số:* $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$.

72. a) Đặt $y = x + 3$ được $y(y + 2)(y^2 + 3y + 1) = 0$. *Đáp số:* $-3; -5; \frac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Đặt $y = x^2 - 4$ được $\begin{cases} y^2 - x = 4 \\ x^2 - y = 4 \end{cases}$ nên $\left(y^2 - x^2\right) + (y - x) = 0$.

$\Leftrightarrow (y - x)(y + x + 1) = 0$. *Đáp số:* $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 \pm +\sqrt{13}}{2}$.

c) $\left(x - 3 + \frac{3}{x}\right)\left(x - 2 + \frac{3}{x}\right) = 2$. Đặt $x + \frac{3}{x} = y$. *Đáp số:* 1; 3.

d) $x^4 + 10x + 4 = 5x^3 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 - 5x^3 + 10x + 4x^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2\right)^2 - 5x\left(x^2 - 2\right) + 4x^2 = 0$.

Đặt $x^2 - 2 = a$, đưa về $(a - x)(a - 4x) = 0$. *Đáp số:* $-1; 2; 2 \pm \sqrt{6}$.

73. Đặt $x - \sqrt{2} = y$, $x + \sqrt{3} = z$ thì $2x + \sqrt{3} - \sqrt{2} = y + z$

Ta có $y^3 + z^3 - (y + z)^3 = 0 \Leftrightarrow yz(y + z) = 0$. *Đáp số:* $\sqrt{2}; -\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$.

74. a) $(x + a)^3 - 3ax(a + x) - 3abx + b^3 = 0 \Leftrightarrow (x + a)^3 + b^3 - 3ax(a + b + x) = 0$

$\Leftrightarrow (a + b + x)(a^2 + b^2 + x^2 - ab - ax - bx) = 0$.

Phương trình $a + b + x = 0$ cho nghiệm $x = -a - b$.

Phương trình $x^2 - (a + b)x + (a^2 + b^2 - ab) = 0$ có $\Delta = -3(a - b)^2 \geq 0$ với $a = b$. Khi đó $x = a$.

Kết luận: Nếu $a \neq b$, nghiệm là $-a - b$. Nếu $a = b$, nghiệm là a và $-2a$.

b) Đặt $a + b = m$, $a - b = n$ thì $4ab = m^2 - n^2$,

$4(a^3 + b^3) = 4(a + b)[(a - b)^2 + ab] = 4m\left(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4}\right) = m^3 + 3mn^2$.

Phương trình trở thành $(m + x)^3 - (m^3 + 3mn^2) - 4x^3 - 3x(m^2 - n^2) = 0$

$\Leftrightarrow -x^3 + mx^2 + n^2x - mn^2 = 0 \Leftrightarrow (m - x)(x + n)(x - n) = 0$.

Đáp số: $a + b, a - b, b - a$.

Scanned with CamScanner

75. $x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3(m^2 - m - 2) = 0.$ (1)

Thay $x = -1$ vào (1) được $m^2 - m = 6$. Thay vào (1) được $x^3 - 13x - 12 = 0$.

Giải phương trình trên với chú ý $x = -1$ là một nghiệm, ta có:

$$x^3 + 1 - 13x - 13 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 12) = 0.$$

Ngoài nghiệm -1, hai nghiệm còn lại là -3 và 4.

76. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$ (1)

Thay $x = \sqrt{2}$ vào (1) được $\sqrt{2}(b + 2) = -(2a + c)$.

Do a, b, c là các số hữu tỉ nên $b + 2 = 0$, do đó $2a + c = 0$.

Thay $b = -2$, $c = -2a$ vào (1) được $(x^2 - 2)(x + a) = 0$.

Các nghiệm của (1) là $\pm\sqrt{2}$ và $-a$.

77. Thay $x = 2 + \sqrt{5}$ vào phương trình được $(4a + b + 17)\sqrt{5} + (9a + 2b + 39) = 0$.

Tìm được $a = -5$, $b = 3$.

Phương trình là $x^5 - 5x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^4 - 4x - 1) = 0$.

Đáp số: $1;\ 2 \pm \sqrt{5}$.

78. Thay x_1 và x_2 vào phương trình, rồi trừ từng vế được

$$4(x_1^4 - x_2^4) - 11(x_1^2 - x_2^2) + 9(x_1 - x_2) = 0.$$

Chia hai vế cho $x_1 - x_2 \neq 0$ và chú ý rằng $x_1 + x_2 = -1$ được

$$-4(x_1^2 + x_2^2) + 11 + 9 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5.$$

Do $x_1 > x_2$ nên từ $x_1 + x_2 = -1$ và $x_1^2 + x_2^2 = 5$, dễ dàng tìm được $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Phương trình đã cho là $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(2x - 1)^2 = 0$.

Đáp số: $1; -2; \frac{1}{2}$.

79. a) $2x = a - \frac{1}{a} \Rightarrow 8x^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$

$$\Rightarrow 8x^3 + 6x = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^3 - \frac{1}{a^3}.$$

b) Viết $\frac{3}{4}$ dưới dạng $\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)$. Đặt $a = \sqrt[3]{2}$.

Theo câu a nếu $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ thì $4x^3 + 3x = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Điều đó chứng tỏ $x_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ là một nghiệm của $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$. (1)

Scanned with CamScanner

Bây giờ ta chứng minh (1) có nghiệm duy nhất. Thật vậy nếu $x > x_o$ thì $4x^3 > 4x_o$, $3x > 3x_o$ nên $4x^3 + 3x > 4x_o^3 + 3x_o = \frac{3}{4}$; tương tự nếu $x < x_o$ thì $4x^3 + 3x < \frac{3}{4}$. Vậy x_o là nghiệm duy nhất của (1).

c) Giải tương tự như câu b. *Đáp số:* $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

80. Phương trình đã cho có ba nghiệm là 2, 3, 4. Ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 26,\quad x_1x_2x_3 = 24.$$

81. a) Đặt $x^2 - 3x + 4 = y$. *Đáp số:* 1; 2. b) Đặt $x^2 - 2x + 3 = y$. *Đáp số:* 1.

c) Đặt $x^2 + 3x - 1 = y$. *Đáp số:* 0; –3; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$.

d) Đặt $x^2 + 2x + 2 = y$. *Đáp số:* 0; –2.

82. Giải tương tự Ví dụ 21.

a) Cộng 1 vào hai vế được $\left(x - 1 + \frac{x}{x-1}\right)^2 = 9$. *Đáp số:* $-1 \pm \sqrt{3}$.

b) Cộng 9 vào hai vế được $\left(x + 9 - \frac{9x}{x+9}\right)^2 = 7^2$. *Đáp số:* $1 \pm \sqrt{19}$.

c) Cộng 1 vào hai vế được $\left(x + 1 - \frac{x}{x+1}\right)^2 = 2^2$. *Đáp số:* $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

d) Cộng 4 vào hai vế được $\left(x + 2 - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 3^2$. *Đáp số:* –1; 2.

e) Cộng 4 vào hai vế được $\left(x + 5 - \frac{5x}{x+5}\right)^2 = 4^2$. *Đáp số:* $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

g) Cộng $(x+3)^2 + 2x$ vào hai vế được $\left(\frac{x}{x-3} + x - 3\right)^2 = (2x-7)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{x-3} + x - 3 = 2x - 7 \\ \frac{x}{x-3} + x - 3 = 7 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 - 6x + 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

83. a) Chia hai vế cho $x + \frac{1}{x} \neq 0$. *Đáp số:* ± 2; $\pm\frac{1}{2}$. b) $2 \pm \sqrt{3}$; $-2 \pm \sqrt{3}$.

84. a) Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt $y = 4x + \frac{7}{x}$ được $y = 9$ và $y = 16$.

Đáp số: $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$.

Scanned with CamScanner

Cũng có thể đặt $4x^2 - 9x + 7 = y$, tìm được $y = 0$ hoặc $y = 7x$. Từ đó tìm được x.

b) Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt $y = 2x + \frac{3}{x}$ được $y = 1$ và $y = \frac{11}{2}$.

Đáp số: $2; \frac{3}{4}$.

c) Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt $y = x + \frac{1}{x}$ được $y = -3$ và $y = \frac{5}{2}$.

Đáp số: $2; \frac{1}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

85. a) Đặt $y = x + \frac{15}{x}$ được $y = 8$; $y = 18$. *Đáp số:* $3; 5; 9 \pm \sqrt{66}$.

b) Đặt $y = x + \frac{5}{x}$ được $y = 2$; $y = 8$. *Đáp số:* $4 \pm \sqrt{11}$.

86. a) Đặt $x - 1 = y$, được $y = \pm 2$; $y = \pm\sqrt{\frac{5}{11}}$. *Đáp số:* $3; -1; \frac{11 \pm \sqrt{55}}{11}$.

b) Đặt $\frac{x+2}{x+1} = y$, $\frac{x-2}{x-1} = z$, được $(y - 2z)(z - 2y) = 0$.

Đáp số: $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

c) Đặt $\frac{x}{x-3} = a$, $\frac{x-3}{x-5} = b$ được $(a - 3b)(a + 4b) = 0$. *Đáp số:* $4; \frac{9}{5}$.

d) Đặt $x - 2 = a$ được $\frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a-2)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(a^2 + 4) = (a^2 - 4)^2$.

Đặt $a^2 = b \geq 0$. *Đáp số:* $2; 2 \pm 2\sqrt{3}$.

e) Đặt $x + \frac{1}{2} = a$ được $4\left(2a^2 + \frac{1}{2}\right) = 5\left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2$.

Đặt $a^2 = b \geq 0$ đưa về $80b^2 - 168b - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -\frac{3}{20} \\ b = \frac{9}{4} \end{array}\right.$.

Đáp số: $1; -2$.

87. a) Đặt $y = \frac{x(3-x)}{x+1}$, $z = x + \frac{3-x}{x+1}$, ta có $yz = 2$, $y + z = 3$. *Đáp số:* 1.

b) Đặt $y = \frac{x(5-x)}{x+1}$, $z = x + \frac{5-x}{x+1}$, ta có $yz = 6$, $y + z = 5$. *Đáp số:* $1; 2$.

Scanned with CamScanner

c) Đặt $y = \dfrac{x(8-x)}{x+1}$, $z = x - \dfrac{8-x}{x-1}$, ta có $yz = 15$, $y + z = 8$.

Đáp số: $\dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}; \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

88. Nhóm hợp lí các phân thức ta được:

$$\frac{2x+7}{x^2+7x} + \frac{2x+7}{x^2+7x+10} = \frac{2x+7}{x^2+7x+6} + \frac{2x+7}{x^2+7x+12}$$

$$\Leftrightarrow (2x+7)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y+10} - \frac{1}{y+6} - \frac{1}{y+12}\right) = 0 \text{ với } y = x^2+7x.$$

Phương trình $2x + 7 = 0$ có nghiệm $x = -\dfrac{7}{2}$.

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+6}\right) + \left(\frac{1}{y+10} - \frac{1}{y+12}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{y^2+6y} + \frac{2}{y^2+22y+120} = 0$$

$\Leftrightarrow y^2 + 18y + 90 = 0$: vô nghiệm.

Đáp số: $x = -\dfrac{7}{2}$.

89. Đặt $x - 1995 = y$. Giải phương trình

$$\frac{y^2 - y(y-1) + (y-1)^2}{y^2 + y(y-1) + (y-1)^2} = \frac{19}{49}, \text{ được } 4y^2 - 4y - 15 = 0.$$

Tìm được $y_1 = 2{,}5$; $y_2 = -1{,}5$.

Đáp số: 1997,5; 1993,5.

90. a) ĐKXĐ: $x \geq -\dfrac{3}{2}$.

$x^2 = 1 - 2\sqrt{2x+3} + (2x+3) \Leftrightarrow x^2 = \left(1 - \sqrt{2x+3}\right)^2$. *Đáp số:* $\sqrt{2}$; $2 - \sqrt{6}$.

b) ĐKXĐ: $x \geq 1$.

$x^2 = 4x + 8\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 = \left(2 + 2\sqrt{x-1}\right)^2$. *Đáp số:* $x = 4 + 2\sqrt{2}$.

c) ĐKXĐ: $x \geq -4$.

Cách 1. Ta có $x^2 = 4 - \sqrt{x+4}$. Cộng $x + \dfrac{1}{4}$ vào hai vế được

$\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+4} - \dfrac{1}{2}\right)^2$. *Đáp số:* $\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{x+4} = y \geq 0$ thì $y^2 - x = 4$ và $x^2 + y = 4$.

Đưa về $(x+y)(x-y+1) = 0$.

Trường hợp $x + y = 0$ cho $x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Scanned with CamScanner

Trường hợp $x - y + 1 = 0$ cho $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

d) Điều kiện: $x \geq -\dfrac{5}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+5} = y \geq 0$ thì $2x + 5 = y^2$ nên

$$4x^2 + 20x + 25 = y^4.$$

Phương trình đã cho là $4x^2 + 20x + 28 = 4\sqrt{2x+5}$ nên $y^4 + 3 = 4y$. Cộng $4y^2 + 1$ vào hai vế được $y^4 + 4y^2 + 4 = 4y^2 + 4y + 1 \Leftrightarrow (y^2+2)^2 = (2y+1)^2$.

Do $y^2 + 2 > 0$ nên $y^2 + 2 = |2y+1|$. Do $y \geq 0$ nên

$y^2 + 2 = 2y + 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$.

Từ đó $x = -2$, thoả mãn điều kiện $x \geq -\dfrac{5}{2}$. Nghiệm của phương trình là $x = -2$.

e) Đặt $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}} = y$ được $2y^3 - 3y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(2y^2 - y - 1) = 0$.

Đáp số: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

91. a) $x + 3 = \sqrt{x^2 + 7x + 11} - 2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1 = \sqrt{(x+2)^2 + 3(x+2) + 1}$.

Đặt $\sqrt{x+2} = y$ ta có $(y+1)^2 = \sqrt{y^4 + 3y^2 + 1}$.

Bình phương hai vế được $y(4y^2 + 3y + 4) = 0$.

Phương trình $4y^2 + 3y + 4 = 0$ vô nghiệm. Do đó $y = 0$, suy ra $x = -2$, thoả mãn.

b) Đặt $\sqrt{1+x} = y$ thì $1 + x = y^2$. Ta có $\sqrt{1-y} = x$.

Từ $\begin{cases} 1 + x = y^2 & (1) \\ 1 - y = x^2 & (2) \end{cases}$ ta được $x + y = y^2 - x^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-y+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 1 - y = x \end{cases}$$

Với $y = -x$, thay vào (1) được $1 + x = x^2$ nên $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, chọn $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Với $1 - y = x$, thay vào (2) được $x = x^2$ nên $x = 0$ hoặc $x = 1$.

c) Điều kiện: $x \geq -1$; $x \neq 0$.

$$\frac{4x}{1+\sqrt{x+1}} + \frac{5}{x} = x \Leftrightarrow \frac{4x\left(\sqrt{x+1} - 1\right)}{x} + \frac{5}{x} = x \Leftrightarrow 4x\sqrt{x+1} - 4x + 5 = x^2$$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 4(x+1) = 9 \Leftrightarrow \left(x - 2\sqrt{x+1}\right)^2 = 9$.

Bạn đọc tự giải tiếp. *Đáp số:* $x = 5 + 2\sqrt{5}$.

92.a) Đặt $\sqrt[3]{2x-1} = y$. Từ $x^3 + 1 = 2y$ và $y^3 + 1 = 2x$, ta được

$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y$. *Đáp số:* $1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Đặt $\sqrt{x+1} = a \geq 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} = b \geq 0$.
Phương trình là $5ab = 2(a^2 + b^2)$.

Cách 1. Rút gọn được $(2a - b)(a - 2b) = 0$. *Đáp số:* $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Cách 2. Chia hai vế cho $b^2 \neq 0$ được $\dfrac{5a}{b} = 2\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 1\right]$. Đặt $\dfrac{a}{b} = y$.

93. a) Điều kiện: $x^4 \geq 7$, $x^3 \geq 7$. Chuyển vế: $\sqrt{x^2 - \dfrac{7}{x^2}} = x - \sqrt{x - \dfrac{7}{x^2}}$.

Bình phương hai vế rồi thu gọn được $x = 2x\sqrt{x - \dfrac{7}{x^2}} \Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{x - \dfrac{7}{x^2}}$.

Bình phương hai vế rồi đưa về $(x - 2)(4x^2 + 7x + 14) = 0$. Ta được $x = 2$, thử lại đúng,
Đáp số: $x = 2$.

b) Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = a \geq 0$, $\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = b \geq 0$.

Ta có $a + b = x$, $a^2 - b^2 = x - 1$. Suy ra $a - b = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Do đó $2a = x + 1 - \dfrac{1}{x} = a^2 + 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x - \dfrac{1}{x} = 1$.

Đáp số: $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (chú ý rằng $x \geq 1$).

Lưu ý. Có thể giải câu a theo cách ở câu b.

94. Điều kiện: $0 < x < 1$. Bình phương hai vế rồi thu gọn ta được:

$$x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ được $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 6 = 0$.

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = y$ (với $y > 2$), đưa về $y^2 - 2y - 8 = 0$ được $y = 4$ (loại $y = -2$).

Từ đó $x = 2 - \sqrt{3}$ (loại $x = 2 + \sqrt{3}$).

Scanned with CamScanner

95. Ta thấy $(x-1)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}} = \begin{cases} \sqrt{(x-1)(x+3)} & \text{với } x > 1 \\ -\sqrt{(x-1)(x+3)} & \text{với } x \le -3. \end{cases}$

Đặt $\sqrt{(x-1)(x+3)} = y \ge 0$.

Xét $x > 1$ ta có $y^2 + 2y - 8 = 0$ được $y = 2$ (loại $y = -4$).

Từ đó $x = -1 + \sqrt{8}$ (loại $x = -1 - \sqrt{8}$).

Xét $x \le -3$ ta có $y^2 - 2y - 8 = 0$ được $y = 4$ (loại $y = -2$).

Từ đó (loại $x = -1 + 2\sqrt{5}x = -1 - 2\sqrt{5}$).

Đáp số: $-1 + \sqrt{8}$; $-1 - 2\sqrt{5}$.

96. Điều kiện: $x \ge 2(a-8)$, $x \ge 0$, $x \ge a - 4$.

Chuyển vế: $\sqrt{x - 2a + 16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x - a + 4}$.

Bình phương hai vế rồi thu gọn được $\sqrt{x^2 - 2ax + 16x} = x - a$.

Với $x \ge a$, bình phương hai vế rồi thu gọn được $x = \dfrac{a^2}{16}$.

Giải điều kiện $x \ge a$ được $a \le 0$ hoặc $a \ge 16$.
Giải điều kiện $x \ge 2(a-8)$ được $(a-16)^2 \ge 0$, đúng.

Kết luận: Với $a \le 0$ hoặc $a \ge 16$ thì $x = \dfrac{a^2}{16}$. Với $0 < a < 16$: vô nghiệm.

97. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$, $x \ne 0$, $a \ge 0$. Rút gọn vế trái, ta được $\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$.

Đưa về $\sqrt{1 - x^2} = x\sqrt{a} - 1$.

Bình phương hai vế (điều kiện $x\sqrt{a} \ge 1$), ta đi đến $x = \dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}$, điều kiện $x\sqrt{a} \ge 1$ dẫn đến $a \ge 1$.
Điều kiện $x \le 1$ thoả mãn (theo bất đẳng thức Cauchy).

Kết luận: Nghiệm là $x = \dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}$ với $a \ge 1$.

98. Bình phương hai vế được $x + y - 2\sqrt{xy} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x + y - 2 = 2\sqrt{xy} - \sqrt{3}$. (1)

Bình phương hai vế của (1) (với $x + y \ge 2$ và $4xy \ge 3$):

$$(x + y - 2)^2 = 4xy + 3 - 4\sqrt{3xy}.$$

Suy ra $\sqrt{3xy}$ là số hữu tỉ. Đặt $\sqrt{3xy} = m$. Từ (1) suy ra

$(x + y - 2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3xy} - 3 \Rightarrow (x + y - 2)\sqrt{3} = 2m - 3$.

Nếu $x + y - 2 \ne 0$ thì $\sqrt{3} = \dfrac{2m - 3}{x + y - 2}$, vô lí (vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ).

Scanned with CamScanner

Vậy $x + y - 2 = 0$. Từ (1) suy ra $2\sqrt{xy} = \sqrt{3}$, tức là $4xy = 3$.

Từ $x + y = 2$, $xy = \frac{3}{4}$, với chú ý rằng $x > y$ ta được $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, thoả mãn các điều kiện đã đặt.

99. a) Từ phương trình đầu, ta tính được $x - 2y = -2$ hoặc $x - 2y = 1$. Từ phương trình sau, ta tính được $2x + y = 8$ hoặc $2x + y = -7$.

Đáp số: (2,8; 2,4), (–3,2; – 0,6), (3,4; 1,2), (–2,6; –1,8).

b) Đặt $\frac{x+y}{x-y} = z$, được $z = 5$, $z = \frac{1}{5}$. *Đáp số:* (3; 2), (–3; –2).

c) Khử xy được $x = \frac{29 - 11y}{7}$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có $11y^2 - 28y + 12 = 0$ được $y = 2$, $y = \frac{6}{11}$. *Đáp số:* (1; 2), $\left(\frac{23}{7}; \frac{6}{11}\right)$.

d) *Đáp số:* (1; 4), (–1; –4).

100. a) *Đáp số:* (–4; 5), (5; –4).

b) Rút y từ $x - y = 1$ rồi thay vào $x^2 - xy + y^2 = 7$, được $x^2 - x - 6 = 0$.

Đáp số: (–2; –3), (3; 2).

c) *Đáp số:* (–1; –4), (4; 1).

d) Đưa về $x - y = 2$ và $x^2 + xy + y^2 = 13$. *Đáp số:* (–1; –3), (3; 1).

e) Ta có $x^2 + xy + y^2 = 19a^2$. Thay $y = x - a$ vào phương trình trên và thu gọn được $x^2 - ax - 6a^2 = 0$. *Đáp số:* (3a; 2a), (–2a; –3a).

101. a) *Cách 1.* Trừ từng vế hai phương trình, được $(x - y)(x + y - 2) = 0$.

Đáp số: (–1; –1).

Cách 2. Cộng từng vế hai phương trình, được $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$.

b) *Đáp số:* (0; 0), (5; 5), (2; –1), (–1; 2).

c) Trừ từng vế hai phương trình, được $(x - y)(xy + 3) = 0$.

Đáp số: (0; 0), $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

102. Giải tương tự Ví dụ 31.

a) *Cách 1.* Nhân hai vế của phương trình đầu với 25, của phương trình sau với 17, rồi trừ từng vế hai phương trình, đưa về $(3x - y)(11x + 9y) = 0$.

Cách 2. Đặt $y = kx$ dẫn tới $9k^2 - 16k - 33 = 0$ được $k = 3$, $k = -\frac{11}{9}$.

Đáp số: (1; 3), (–1; –3); $\left(\frac{9}{\sqrt{5}}; \frac{-11}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{-9}{\sqrt{5}}; \frac{11}{\sqrt{5}}\right)$.

b) *Đáp số:* (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{-11}{\sqrt{69}}; \frac{2}{\sqrt{69}}\right)$, $\left(\frac{11}{\sqrt{69}}; \frac{-2}{\sqrt{69}}\right)$.

103. a) Từ đề bài suy ra $xy + x^2 = 4x^2 - 2y^2$. Đưa về $(x - y)(3x + 2y) = 0$.

Đáp số: (1; 1), (–1; –1).

Scanned with CamScanner

b) Đặt $x + y = S$, $xy = P$. Từ $S - P = 1$, $S^2 - 2P = 5$ được $S = 3$, $P = 2$ và $S = -1$, $P = -2$. *Đáp số:* (2; 1), (1; 2), (–2; 1), (1; –2).

Cách khác. Biến đổi $x + y - xy = 1$ thành $(x - 1)(1 - y) = 0$.

104. a) Chia hai vế của mỗi phương trình cho $x + y \neq 0$ được

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{8}{29} \Rightarrow \frac{\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 - 2xy + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \frac{29 - 8}{29}$$

$$\Rightarrow \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{21}{29} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{29 - 21}{29 + 21} \Rightarrow \frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} = \frac{4}{25}$$

$\Rightarrow (x - y)^2 = \frac{4}{25}(x + y)^2$. Thay vào $(x + y)(x - y)^2 = 160$ tìm được $x + y = 10$.

Từ đó $x - y = \pm 4$. Ta được (3;7) và (7;3), thử lại đúng.

b) $x^3 + y^3 = 35(x - y)$ và $x^2 - y^2 = 5$.

Thay 35 bằng $7\left(x^2 - y^2\right)$ được $x^3 + y^3 = 7\left(x^2 - y^2\right)(x - y)$.

Chia cả hai vế cho $x + y \neq 0$ được

$x^2 - xy + y^2 = 7(x - y)^2 \Leftrightarrow (2x - 3y)(3x - 2y) = 0$.

Đáp số: (3; 2), (–3; –2).

c) $x^2 - xy + y^2 = 7$ và $x^3 - 7(x + y) = 8$. Thay 7 bằng $x^2 - xy + y^2$ được

$x^3 - (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 8 \Leftrightarrow y^3 = -8 \Leftrightarrow y = -2$.

Đáp số: (1; –2), (–3; –2).

d) $x^2 + y^2 = 10$ và $(x + y)(5 + xy) = 32$.

Thay 5 bằng $\frac{x^2 + y^2}{2}$ được

$(x + y)\left(x^2 + y^2 + 2xy\right) = 64 \Leftrightarrow (x + y)^3 = 4^3 \Leftrightarrow x + y = 4$.

Đáp số: (1; 3), (3; 1).

105. a) *Cách 1.* Đặt $xy = a$. Ta có

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2a$. Phải có $a \leq 8$.

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (16 - 2a)^2 - 2a^2$.

$82 = 256 - 64a + 2a^2 \Leftrightarrow (a - 29)(a - 3) = 0$. Vậy $a = 3$.

Đáp số: (3; 1), (1; 3).

Cách 2. Đặt $x = 2 + a$, $y = 2 - a$. Thay vào $x^4 + y^4 = 82$ được phương trình trùng phương đối với a.

b) Trước hết tính $x^2 - xy + y^2$. *Đáp số:* (2; –1), (–1; 2).

106. a) *Đáp số:* (2; 2; 2), (–2; –2; –2).

b) Nhân hai vế của phương trình đầu với 3, bình phương hai vế của phương trình sau, rồi trừ dẫn đến $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$. Suy ra $x = y = z$. *Đáp số:* (1; 1; 1).

Scanned with CamScanner

107. a) Điều kiện: x, y, z, x + y, y + z, x + z khác 0. Từ các phương trình đã cho, ta có
$xy + xz = 3(x + y + z)$, $xy + yz = 4(x + y + z)$, $xz + yz = 5(x + y + z)$.

Từ đó $xy + xz + yz = 6(x + y + z)$.

Suy ra $yz = 3(x + y + z)$, $xz = 2(x + y + z)$, $xy = x + y + z$.

Do đó y: x = 3: 2, z: y = 2: 1.

Đặt $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 6k$ ($k \neq 0$), ta tìm được $k = \frac{11}{6}$. *Đáp số:* $\left(\frac{11}{3}; \frac{11}{2}; 11\right)$.

b) Rút y + z ở phương trình đầu được $y + z = 8 - x$.

Rút yz ở phương trình cuối được $yz = \frac{16}{x}$ (do $x \neq 0$).

Thay vào phương trình còn lại được $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 (x - 4) = 0$.

Đáp số: (2; 2; 4), (2; 4; 2), (4; 2; 2).

Lưu ý. Có thể giải câu b bằng cách sau:

x, y, z là nghiệm của phương trình

$(t - x)(t - y)(t - z) = 0 \Leftrightarrow t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz = 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 8t^2 + 20t - 16 = 0$. Sau đó giải tiếp như trên.

c) Từ các phương trình đã cho, ta có

$(x + 1)(y + 1) = 2$, $(y + 1)(z + 1) = 4$, $(z + 1)(x + 1) = 8$.

Nhân từng vế các phương trình trên.

Đáp số: (1; 0; 3), (–3; –2; –5).

d) Điều kiện: x, y, z khác 0. Rút y từ phương trình đầu, rút z từ phương trình cuối rồi thay vào phương trình còn lại được $\frac{1}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = 1$ (dễ thấy do $x - \frac{1}{y} = 1$ nên $x \neq 1$, do $z - \frac{1}{x} = 1$ và $z \neq 0$ nên $x \neq -1$). Giải phương trình ẩn x nói trên ta được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. *Đáp số:* $x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

108. a) Ta có $x^2(x - 1) = 1 - y$, $2y^2(y - 1) = 1 - z$, $3z^2(z - 1) = 1 - x$.

Nhân từng vế ba phương trình được

$6x^2y^2z^2(x - 1)(y - 1)(z - 1) = -(x - 1)(y - 1)(z - 1)$

$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1)(z - 1)(6x^2y^2z^2 + 1) = 0$. *Đáp số:* $x = y = z = 1$.

b) Từ $x + y + z = 7$ ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z(x + y) = 49$ nên

$21 + 2z^2 + 2z(7 - z) = 49$. Suy ra $z = 2$.

Ta có $x + y = 5$ và $xy = 4$ nên (x, y, z) là (1; 4; 2) hoặc (4; 1; 2).

c) Nếu một trong x, y, z bằng 0 thì hai số kia bằng 0.

Xét $x, y, z \neq 0$. Từ $\frac{2x^2}{x^2 + 1} = y$ ta có

Scanned with CamScanner

$\frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y} = 0.$

Tương tự $1 + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{z} = 0$, $1 + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x} = 0$.

Suy ra $\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\right) + \left(1 + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = 1$. Vậy $x = y = z = 1$.

Đáp số: (0; 0; 0), (1; 1; 1).

d) Ta có $x^2 + x + yz = 1$ (1), $y^2 + y + zx = 1$ (2), $z^2 + z + xy = 1$ (3).

Lấy (1) trừ (2) được $x^2 - y^2 + (x - y) + z(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ z - x - y = 1. \end{array}\right.$

Tương tự, lấy (2) trừ (3) được $\left[\begin{array}{l} y = z \\ x - y - z = 1. \end{array}\right.$

Xét bốn trường hợp:

$x = y = z$ được nghiệm (–1; –1; –1) và $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$x = y$ và $x - y - z = 1$ được thêm nghiệm (1; 1; –1).

$y = z$ và $z - x - y = 1$ được thêm nghiệm (–1; 1; 1).

$z - x - y = 1$ và $x - y - z = 1$ được thêm nghiệm (1; –1; 1).

109. Gọi bốn số phải tìm là x, y, z, t. Ta có

$x - y = (y + z + t)^2 - (x + z + t)^2 = (y - z)(x + y + 2z + 2t)$

$\Rightarrow (x - y)(x + y + 2z + 2t + 1) = 0 \Rightarrow x = y.$

Tương tự $x = y = z = t = \frac{1}{9}$.

§5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

110. Gọi số đất đội I đã đào một ngày là x (m^3), điều kiện $x > 0$.

Phương trình: $\frac{810}{x} - \frac{900}{x + 4} = 6 - 3 \Leftrightarrow x^2 + 34x - 1\,080 = 0.$

Giải ra được $x_1 = 20$; $x_2 = -54$ (loại).

Đội I đào 20 m^3 một ngày, đội II đào 24 m^3 một ngày.

111. Gọi thời gian rơi của hòn đá từ miệng giếng đến đáy giếng là t (giây) điều kiện $0 < t < 1,5$, thời gian âm truyền từ đáy giếng đến miệng giếng là $1,5 - t$ (giây).

Phương trình: $5t^2 = 340(1,5 - t) \Leftrightarrow t^2 + 68t - 102 = 0.$

Scanned with CamScanner

Nghiệm dương là: $t \approx 1,5$. Giếng sâu 11 m.

112. Gọi khối lượng quặng loại I là x (tấn), điều kiện $0 < x < 10$. Phương trình:

$$\frac{0,8}{x} - \frac{0,6}{10-x} = \frac{10}{100}.$$

Giải ra được $x_1 = 20$ (loại), $x_2 = 4$.

Khối lượng quặng loại I là 4 tấn, khối lượng quặng loại II là 6 tấn.

113. Gọi bán kính của hình tròn lúc đầu là x (mét), điều kiện $x > 0$. Phương trình:

$$2\pi x^2 = \pi(x + 1,5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2,25 = 0.$$

Nghiệm dương: $x = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$. Đường kính lúc đầu là $3(1 + \sqrt{2}) \approx 7,24$ m.

114. 24 km/h và 18 km/h.

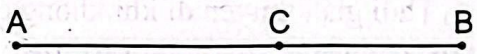
115. Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x (giờ), điều kiện $x > 5$.

Phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0$.

Giải ra được $x_1 = 2$ (loại); $x_2 = 15$. Vòi I chảy 15 giờ đầy bể, vòi II chảy 10 giờ đầy bể.

116.(h.87). Tổng vận tốc lúc đầu của hai người là

$$60 : \frac{6}{5} = 50 \text{ (km/h)}.$$



Hình 87

Gọi vận tốc của người I lúc đầu là x (km/h), điều kiện $0 < x < 50$, thì vận tốc của người II là $50 - x$ (km/h).

Quãng đường CB dài $\frac{6}{5}(50 - x)$ km, quãng đường CA dài $\frac{6}{5}x$ (km).

Người I đi quãng đường CB với vận tốc $(x - 6)$ (km/h) hết $\frac{6(50-x)}{5(x-6)}$ giờ.

Người II đi quãng đường CA với vận tốc $(50 - x)$ (km/h) hết $\frac{6x}{5(50-x)}$ giờ.

Phương trình: $\frac{6x}{5(50-x)} - \frac{6(50-x)}{5(x-6)} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x^2 + 85x - 3\,450 = 0$.

Giải ra được $x_1 = 30$, $x_2 = -115$ (loại).

Vận tốc lúc đầu của người I là 30 km/h, vận tốc của người II là 20 km/h.

117. a) Giá mua một chiếc áo là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng), điều kiện $x > 2$. Phương trình:

$$2.\frac{480}{2x} + (x-2)\left(\frac{480}{x} + 8\right) = 480 + 72 \Leftrightarrow 8x^2 - 88x = 480 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 60 = 0.$$

Nghiệm dương là $x = 15$.

b) Giá mua một chiếc áo là $\frac{d}{x}$ (nghìn đồng). Ta có

$$2.\frac{d}{2x} + (x-2)\left(\frac{d}{x} + 8\right) = d + 72 \Leftrightarrow 8x^2 - 88x = d \Leftrightarrow 8x(x-11) = d.$$

Scanned with CamScanner

Do d và x là các số nguyên dương nên $x > 11$.

Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của x là 12.

118. Gọi thời gian thuyền đi từ A đến B khi không có gió là x (giây), điều kiện $x > 9$. Thời gian thuyền đi từ A đến B khi gió thổi thuận chiều là $x - 9$ (giây).

Khi không có gió, trong một giây thuyền đi được $\frac{1}{x}$ (quãng đường AB).

Khi gió thổi thuận chiều, trong một giây thuyền đi được $\frac{1}{x-9}$ (quãng đường AB).

Khi gió thổi ngược chiều, trong một giây thuyền đi được $\frac{1}{84}$ (quãng đường AB).

Ta biết rằng vận tốc của thuyền khi không có gió bằng trung bình cộng của vận tốc thuyền khi gió thổi thuận chiều và vận tốc thuyền khi gió thổi ngược chiều. Do đó:

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x-9} + \frac{1}{84}\right) : 2 \Leftrightarrow x^2 - 93x + 1\,512 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 72$, $x_2 = 21$.

Thời gian thuyền đi khi không có gió là 72 giây hoặc 21 giây.

119. Gọi thời gian người I, II, III làm một mình xong công việc theo thứ tự là x, y, z (giờ), điều kiện $x, y, z > 0$. Trong một giờ, mỗi người I, II, III làm được $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ (công việc), cả ba người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (công việc).

Thời gian cả ba người cùng làm xong công việc là $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Ta có

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = z - 18 = y - 3 = \frac{1}{2}x \text{ nên } \frac{1}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{z-18} = \frac{1}{y-3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Biểu thị z theo x, được $z = \frac{x+36}{2}$. Biểu thị y theo x được $y = \frac{x+6}{2}$. Từ đó dẫn đến phương trình $x^2 + 14x - 72 = 0$. Nghiệm dương là $x = 4$. Từ đó $y = 5$, $z = 20$.

Thời gian người I, II, III làm một mình xong công việc theo thứ tự là 4 giờ, 5 giờ, 20 giờ.

120. Gọi số người của lớp 9A đấu cờ là x (x nguyên dương, $x > 1$).

Lớp 9A đấu với nhau $\frac{x(x-1)}{2}$ trận, được $\frac{x(x-1)}{2}$ điểm khi đấu với nhau, cũng được số điểm như thế khi đấu với lớp 9B, do đó tổng số điểm của lớp 9A là $x(x-1)$. (1)

Lớp 9B có 3 người, đấu với nhau được 3 điểm, do đó tổng số điểm của lớp 9B là 6.(2)

Scanned with CamScanner

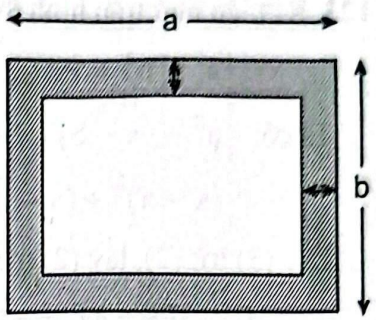
Cả hai lớp có tổng cộng $(x + 3)$ người, tổng số trận đấu là $\frac{(x+3)(x+2)}{2}$, do đó tổng số điểm của hai lớp là $\frac{(x+3)(x+2)}{2}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$x(x-1) + 6 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 6. \end{cases}$$

Vậy lớp 9A có 6 bạn học sinh đấu cờ.

121. (h.88) Gọi a, b là các kích thước của hình chữ nhật ($a \geq b$), x là chiều rộng của dải đất. Ta có



Hình 88

$$x < \frac{b}{2} \qquad (1)$$

Diện tích mảnh đất ban đầu là ab, diện tích phần còn lại là $(a - 2x)(b - 2x)$.

Ta có $2(a - 2x)(b - 2x) = ab$.

Thu gọn được $8x^2 - 4(a + b)x + ab - 0$.

$\Delta' = 4(a + b)^2 - 8ab = 4(a^2 + b^2) = 4d^2$ (với d là độ dài đường chéo của hình chữ nhật). Giải ra được $x_1 = \frac{a+b-d}{4}$; $x_2 = \frac{a+b+d}{4}$.

Ta thấy $x_2 > \frac{a+b}{4} \geq \frac{2b}{4} = \frac{b}{2}$, trái với (1), loại.

Còn $x_1 < \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b-d}{4} < \frac{b}{2} \Leftrightarrow a - b < d$, đúng.

Chỉ có nghiệm $x = \frac{a+b-d}{4}$ thoả mãn bài toán. Vậy cách làm trên là đúng.

122. Gọi số rượu trong thùng lúc đầu là x cốc. Ta có bảng sau:

Lần	Lấy ra	Lượng rượu lấy	Lượng rượu còn lại	Tỉ số lượng rượu còn lại so với lúc đầu
1	3 cốc	3	$a_1 = x - 3$	$s_1 = \frac{x-3}{x}$
2	3 cốc	$\frac{3(x-3)}{x}$	$a_2 = x - 3 - \frac{3(x-3)}{x} = \frac{(x-3)^2}{x}$	$s_2 = \frac{(x-3)^2}{x^2}$
3	3 cốc	$\frac{3(x-3)^2}{x^2}$	$a_3 = \frac{(x-3)^2}{x} - \frac{3(x-3)^2}{x^2} = \frac{(x-3)^3}{x^2}$	$s_3 = \frac{(x-3)^3}{x^3}$

Scanned with CamScanner

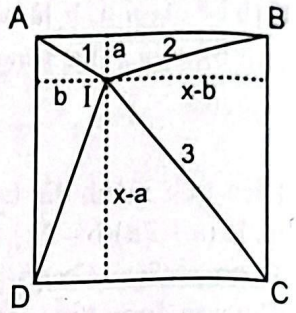
Sau ba lần, lượng rượu (nguyên chất) còn lại so với lúc đầu bằng $\frac{1}{2}$ nên

$$\frac{(x-3)^3}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Ta có $\left(\frac{x-3}{x}\right)^3 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{1,26}\right)^3$ nên $\frac{x-3}{x} = \frac{1}{1,26} \Leftrightarrow x = \frac{189}{13} \approx 14,54$ (cốc).

Thùng rượu lúc đầu có 14,54 cốc.

123. Kí hiệu như trên hình 89. Gọi x là cạnh hình vuông.



Hình 89

Ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ a^2 + (x-b)^2 = 4 & (2) \\ (x-a)^2 + (x-b)^2 = 9 & (3) \end{cases}$

Lấy (3) trừ (2), lấy (2) trừ (1) được

$$\begin{cases} (x-a)^2 - a^2 = 5 \\ (x-b)^2 - b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax = x^2 - 5 \\ 2bx = x^2 - 3 \end{cases}$$

Suy ra $4a^2x^2 + 4b^2x^2 = \left(x^2-5\right)^2 + \left(x^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2\left(a^2+b^2\right) = 2x^4 - 16x^2 + 34$

Do $a^2 + b^2 = 1$ nên $x^4 - 10x^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \pm 2\sqrt{2}$.

Do $x^2 - 5 = 2ax > 0$ nên $x^2 > 5$, vậy $x^2 = 5 + 2\sqrt{2} \approx 7,83$.

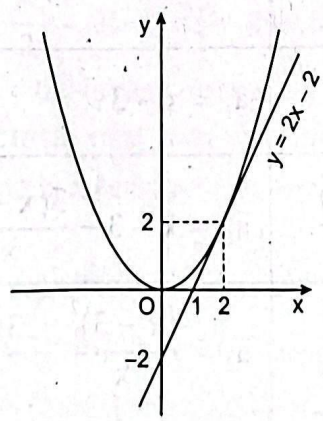
Diện tích sa bàn là $7,83m^2$.

Chuyên đề 1. QUAN HỆ GIỮA PARABOL $y = ax^2$ VÀ ĐƯỜNG THẲNG $y = mx + n$

124. Tìm n để phương trình $x^2 = 4x + n$ có nghiệm kép, được $n = -4$.

Tiếp điểm A có toạ độ là (2; 4).

125. (h.90)



Hình 90

a) Từ điều kiện đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm (1; 0) ta tìm được $n = -m$.

Scanned with CamScanner

Giải điều kiện để đường thẳng $y = mx - m$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{2}x^2$, ta được $m_1 = 0; m_2 = 2$.

Với $m = 0$, đường thẳng là $y = 0$ (trục hoành), toạ độ của tiếp điểm là $(0; 0)$.

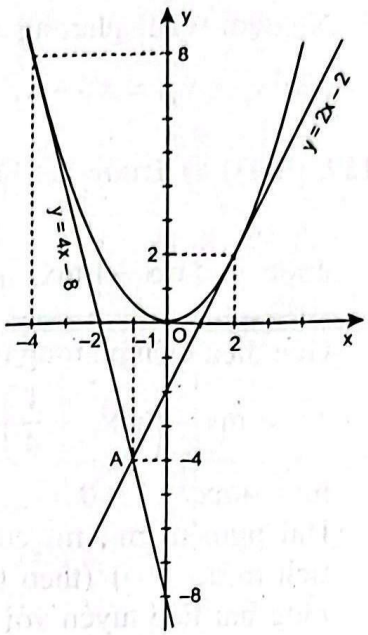
Với $m = 2$, đường thẳng là $y = 2x - 2$, toạ độ của tiếp điểm là $(2; 2)$.

b) (h.91) Đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm $(-1; -4)$, ta tìm được $n = m - 4$.

Giải điều kiện để đường thẳng $y = mx + (m - 4)$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{2}x^2$, ta được $m_1 = -4; m_2 = 0$.

Với $m = -4$, đường thẳng là $y = -4x - 8$, toạ độ của tiếp điểm là $(-4; 8)$.

Với $m = 2$, đường thẳng là $y = 2x - 2$, toạ độ của tiếp điểm là $(2; 2)$.



Hình 91

126. Giải tương tự ví dụ 37. *Đáp số:* $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

127. *Đáp số:* $\min HK = 4$, $\min AB = 4$, $\min S_{OAB} = 4$.

Bạn đọc tự giải.

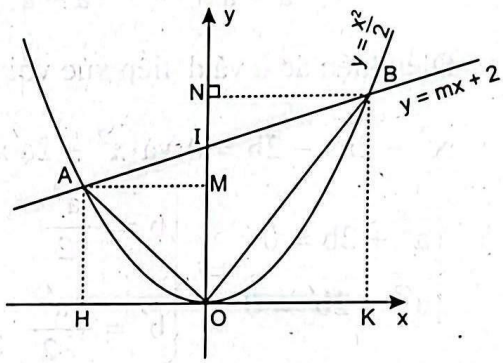
128. (h.92) Gọi hoành độ của A và B là x_1 và x_2. Chúng là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2}{2} - mx - 2 = 0 \text{ hay } x^2 - 2mx - 4 = 0. \quad (1)$$

Phương trình này luôn có nghiệm vì

$$\Delta' = m^2 + 4 > 0.$$

Gọi I(0; 2) là giao điểm của (d) với trục tung. Gọi M, N là hình chiếu của A, B trên Ox. Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên Oy. Ta có



Hình 92

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OI(AM + BN) = \frac{1}{2}OI \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |x_1 - x_2| = |x_1 - x_2|.$$

Ta có $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = -4$ nên

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2 + 16 = 4(m^2 + 4), \text{ nên } |x_1 - x_2| = 2\sqrt{m^2 + 4}.$$

a) Giải $2\sqrt{m^2 + 4} = 4$ ta được $m = 0$. Đường thẳng (d) là $y = 2$.

b) Giải $2\sqrt{m^2 + 4} = 2\sqrt{5}$ ta được $m = \pm 1$.

Đường thẳng (d) là $y = x + 2$ hoặc $y = -x + 2$.

Lưu ý. Ta có thể tìm $|x_1 - x_2|$ như sau:

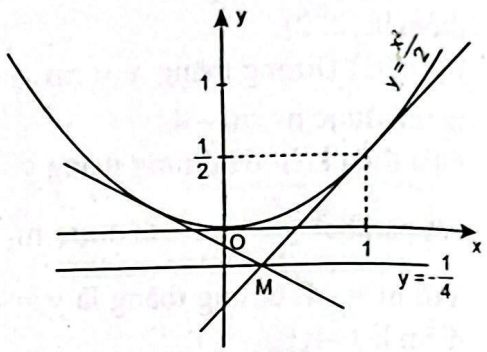
Scanned with CamScanner

Nghiệm của phương trình (1) là $x_1 = m - \sqrt{m^2+4}$ và $x_2 = m + \sqrt{m^2+4}$ nên $|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 = 2\sqrt{m^2+4}$.

129. (h.93) a) Trước hết lập phương trình đường thẳng $y = mx + n$ đi qua $M\left(x_0; -\frac{1}{4}\right)$ được $y = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$.

Giải điều kiện phương trình $x^2 = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$ có nghiệm kép, được $m^2 - 4mx_0 - 1 = 0$.

Hai nghiệm m_1, m_2 của phương trình này có tích $m_1m_2 = -1$ (theo hệ thức Viète, chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến với parabol kẻ từ M vuông góc với nhau.



Hình 93

b) Gọi hai tiếp tuyến đi qua M là d và d′ có phương trình $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ $(a \neq a')$.

Ta tìm toạ độ của M. Ta có $ax + b = a'x + b'$ nên $(a - a')x = b' - b$.

Từ đó $x = \frac{b' - b}{a - a'}$, $y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$. (1)

Điều kiện để d và d′ tiếp xúc với parabol $y = \frac{x^2}{2}$ là các phương trình $x^2 - 2ax - 2b = 0$ và $x^2 - 2a'x - 2b' = 0$ có nghiệm kép, tức là

$$\begin{cases} a^2 + 2b = 0 \\ a'^2 + 2b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{a^2}{2} \\ b' = -\frac{a'^2}{2} \end{cases}$$

Do $d \perp d'$ nên $aa' = -1$. Từ đó $a' = -\frac{1}{a}$ và $b' = -\frac{1}{2a^2}$.

Thay vào (1) được

$$y = \frac{ab' - a'b}{a - a'} = \frac{a\left(-\frac{1}{2a^2}\right) - \left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{2}\right)}{a - \left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{-\frac{1}{2a} - \frac{a}{2}}{a + \frac{1}{a}} = \frac{-\frac{a^2+1}{2a}}{\frac{a^2+1}{a}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$.

130. (h.94) Gọi toạ độ của A và B theo thứ tự là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Các điểm A, B thuộc parabol $y = x^2$ nên $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Ta có $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Scanned with CamScanner

Do A, B là giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + 2$ nên x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 = mx + 2$, tức là $x^2 - mx - 2 = 0$.

Giả sử $x_1 < x_2$ thì

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 8}}{2},\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8}}{2}.$$

Khi đó $x_2 - x_1 = \sqrt{m^2 + 8}$, $x_2 + x_1 = m$,

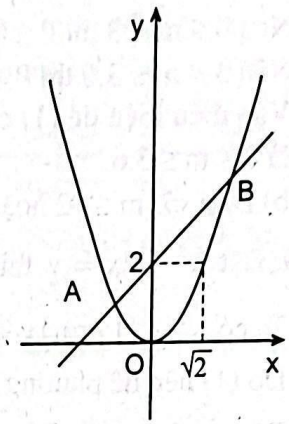
$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = m\sqrt{m^2 + 8}$.

Suy ra

$AB^2 = (m^2 + 8) + m^2(m^2 + 8) = (m^2 + 8)(m^2 + 1)$

$= m^4 + 9m^2 + 8 \geq 8$.

Do đó $\min AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 0$.



Hình 94

Chuyên đề 2. ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

131. $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Tổng các nghiệm của phương trình bằng 2 nên phương trình bao giờ cũng có nghiệm dương. *Đáp số:* $m \leq 3$.

132. Đặt $|x - 2| = y$ thì $x^2 - 4x + 4 = y^2$. Phương trình đã cho trở thành $y^2 + 2my + m^2 - 1 = 0$. Cần tìm m để phương trình này có ít nhất một nghiệm $y \geq 0$.

Đáp số: $m \leq 1$.

133. *Đáp số:* $-3 < m < 1$.

134. *Đáp số:* $m < -2$.

135. Nghiệm nhỏ của phương trình là $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}$.

Giải bất phương trình $x_1 \leq -2$ được $m \geq \frac{3}{2}$.

136. $x^2 - 2(m-1)x + (m^2 - 1) = 0$.

(1) có đúng một nghiệm dương nếu có một trong các điều kiện:

(1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

(1) có nghiệm kép và dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m > 1 \end{cases}$ không xảy ra.

Đáp số: $-1 < m < 1$.

137. $(x - 1)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0$.

Cần tìm m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Đáp số: $-2 < m < -1$, $-1 < m < 2$.

138. a) Đặt $x^2 = y$. Cần tìm m để phương trình $(m - 3)y^2 - 2my + 6m = 0$ (1)

có ít nhất một nghiệm $y \geq 0$. Giải theo cách 2 của Ví dụ 39.

Với $m = 3$ thì (1) có nghiệm $y = 3$.

Scanned with CamScanner

Với $m \neq 3$, ta tính được

$\Delta' = m(18 - 5m)$, $P = \dfrac{6m}{m-3}$, $S = \dfrac{2m}{m-3}$, $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3,6$.

Nếu $0 \leq m < 3$ thì $P \leq 0$ nên phương trình (1) tồn tại nghiệm không âm.

Nếu $3 < m \leq 3,6$ thì $P > 0$ và $S > 0$ nên (1) có hai nghiệm dương.

Vậy điều kiện để (1) có nghiệm không âm, tức là để phương trình đã cho có nghiệm, là $0 \leq m \leq 3,6$.

b) *Đáp số:* $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

139. Đặt $x^2 - 2x = y$ thì $(x-1)^2 = y + 1$. (1)

Ta có $y^2 + (1-m)y + 2 = 0$. (2)

Do (1) nên để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt, phải có $y + 1 > 0$.

Đặt $y + 1 = z$ ta có $(z-1)^2 + (1-m)(z-1) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - (m+1)z + (m+2) = 0. \quad (3)$$

Cần tìm m để (3) có đúng một nghiệm dương, đó là khi có một trong các điều kiện:

+ (3) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

+ (3) có nghiệm kép và dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 7 = 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt{8}$.

Đáp số: $m < -2$ hoặc $m = 1 + \sqrt{8}$.

140. Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $y^2 - 2(m-1)y - (m-3) = 0$. (2)

$\Delta' = (m-1)^2 + (m-3) = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$.

$P = 3 - m$, $S = 2(m-1)$.

a) (1) có bốn nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta' > 0, P > 0, S > 0$.

Ta tìm được $2 < m < 3$.

b) (1) có ba nghiệm $\Leftrightarrow P = 0$ và $S > 0$. Ta tìm được $m = 3$.

c) (1) có hai nghiệm nếu xảy ra một trong hai trường hợp:

+ (2) có nghiệm kép dương. Từ $\Delta' = 0$ và $S > 0$, ta được $m = 2$.

+ (2) có hai nghiệm trái dấu. Từ $P < 0$, ta được $m > 3$.

d) (1) vô nghiệm nếu xảy ra một trong hai trường hợp:

+ (2) vô nghiệm. Từ $\Delta' < 0$, ta được $-1 < m < 2$.

+ (2) có hai nghiệm (kép hoặc phân biệt) âm. Từ $\Delta' \geq 0, P > 0, S < 0$ ta được $m \leq -1$.

Do đó (1) vô nghiệm nếu $m < 2$.

141. Giải tương tự Ví dụ 47.

a) Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $my^2 - 10my + (m+8) = 0$. (1)

Gọi a, b là nghiệm của (1), giả sử $0 < a < b$.

Từ $b = 9a$, $a + b = 10$, $ab = \dfrac{m+8}{m}$, ta được $a = 1, b = 9, m = 1$. Phương trình đã cho là $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, có các nghiệm là $-3, -1, 1, 3$.

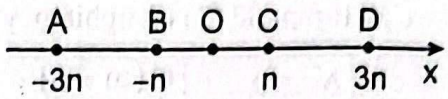
b) Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $y^2 - (m+7)y + 3m = 0$. *Đáp số:* $3; \dfrac{49}{3}$.

Scanned with CamScanner

142. Ta thấy nếu k là nghiệm của phương trình

$$x^4 - 40x^2 + 6m = 0 \qquad (1)$$

thì –k cũng là nghiệm của phương trình đó. Do đó, trong bốn nghiệm của phương trình (1), có hai nghiệm dương và hai nghiệm âm. Gọi nghiệm dương nhỏ nhất của (1) là n. Do AB = BC = CD nên hoành độ của các điểm C, B, D, A theo thứ tự là n, –n, 3n, –3n (hình bên).



Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $y^2 - 40y + 6m = 0$. (2)

Phương trình (2) có hai nghiệm dương là n^2 và $9n^2$.

Từ $n^2 + 9n^2 = 40$ và $n^2.9n^2 = 6m$, ta tìm được $n = 2$ (chú ý rằng $n > 0$), do đó $m = 24$.

Phương trình (1) là $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$, có các nghiệm –6; –2; 2; 6.

143. Đặt $(x + 1)^2 = y \geq 0$. Ta có $y^2 - (m - 1)y - (m^2 - m + 1) = 0$. (1)

Do $P = -(m^2 - m + 1) < 0$ nên (1) có hai nghiệm trái dấu.

Gọi nghiệm dương là a. Từ $(x + 1)^2 = a$, ta được $x = -1 \pm \sqrt{a}$, đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.

144. Phương trình $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$ (1)

là phương trình đối xứng bậc bốn. Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt ẩn phụ $x + \frac{1}{x} = y$, (1) trở thành $y^2 + my - 1 = 0$. (2)

Để phương trình $x + \frac{1}{x} = y$ (với y là tham số) có nghiệm hay phương trình $x^2 - yx + 1 = 0$ có nghiệm, ta phải có $y^2 - 4 \geq 0$, tức là $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$.

Do đó để (1) có nghiệm thì (2) phải có ít nhất một nghiệm thoả mãn $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$.

Điều kiện để tồn tại nghiệm của (2) thoả mãn $y \geq 2$ là $m \leq -\frac{3}{2}$ (xem Ví dụ 40).

Điều kiện để tồn tại nghiệm của (2) thoả mãn $y \leq -2$ là $m \geq \frac{3}{2}$ (xem Bài tập 135).

Đáp số: $m \leq -\frac{3}{2}$ hoặc $m \geq \frac{3}{2}$.

145. a) Đặt $\sqrt{x - m} = y \geq 0$, ta có $2(y^2 + m) - 4 = 3y \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + (2m - 4) = 0$. (1)

Cần tìm m để (1) có nghiệm $y \geq 0$. Giải $\Delta \geq 0$ được $m \leq \frac{41}{16}$. Khi đó tổng hai nghiệm $y_1 + y_2 = \frac{3}{2} > 0$ nên luôn tồn tại nghiệm dương. *Đáp số:* $m \leq \frac{41}{16}$.

b) Biến đổi $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}}$ thành $\sqrt{\left(\sqrt{x - 4} + 2\right)^2} = \sqrt{x - 4} + 2$ nên phương trình đã cho là $x + 2 + 2\sqrt{x - 4} = m$. (1)

Đặt $\sqrt{x - 4} = y$ được $y^2 + 2y + (6 - m) = 0$. (2)

Cần tìm m để (2) có nghiệm $y \geq 0$.

Đáp số: $m \geq 6$.

Scanned with CamScanner

c) Với $x \geq 3$ ta có $2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10 = x^2 - 6x + 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (5m+1) = 0.$ (1)

Cần tìm m để (1) có nghiệm $x \geq 3$.

Đặt $x - 3 = y$ ta có $y^2 - 2(m-2)y + (4-m) = 0.$ (2)

Cần tìm m để (2) có nghiệm $y \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-3) \geq 0 \\ 2(m-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m \geq 3 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Đáp số: $m \geq 3$.

146. a) Nếu a là nghiệm của phương trình thì – a cũng là nghiệm. Do đó a phải bằng 0, khi đó m = 4. Dễ dàng giải phương trình $\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2} = 4$, được x = 0.

b) Tương tự như Ví dụ 48, nếu a là nghiệm của phương trình thì 4 – a cũng là nghiệm.

Đáp số: m = 4, nghiệm của phương trình là x = 2.

c) Nếu a là nghiệm của phương trình thì 8 – a cũng là nghiệm.

Đáp số: m = –3, nghiệm của phương trình là x = 4.

Chuyên đề 3. ĐA THỨC BẬC HAI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TOÁN CỰC TRỊ

147. a) Viết đẳng thức đã cho dưới dạng một phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 + (y-1)x + (y^2 - y) = 0.$$

Giải điều kiện $\Delta \geq 0$ được $-\frac{1}{3} \leq y \leq 1$. Tương tự $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

b) Viết đẳng thức đã cho dưới dạng một phương trình bậc hai đối với x, rồi giải điều kiện $\Delta \geq 0$ được $y^2 + 4y \leq 0$.

c) Ta có $b + c = 5 - a$, $bc = 8 - a(b+c) = 8 - a(5-a)$.

Áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2 \geq 4bc$ đưa về $3a^2 - 10a + 7 \leq 0$.

Giải $3a^2 - 10a + 7 \leq 0$ được $(a-1)(3a-7) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq \frac{7}{3}$.

Tương tự $1 \leq b \leq \frac{7}{3}$, $1 \leq c \leq \frac{7}{3}$.

Giải điều kiện $\Delta \geq 0$ được $1 \leq a \leq \frac{7}{3}$. Tương tự $1 \leq b \leq \frac{7}{3}$, $1 \leq c \leq \frac{7}{3}$.

148. $A = (a+b) + c(1-ab)$. Đặt $a + b = x$, ta có

$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = x^2 - (2 - c^2) = x^2 + c^2 - 2$ nên

$2A = 2x + c(2 - 2ab) = 2x + c(4 - x^2 - c^2) = -cx^2 + 2x - c^3 + 4c$.

Cần chứng minh $2A \leq 4 \Leftrightarrow -cx^2 + 2x - c^3 + 4c \leq 4$

$$\Leftrightarrow cx^2 - 2x + (c^3 - 4c + 4) \geq 0.$$

Scanned with CamScanner

Do $x_1 < x_2$ nên điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 là
$x_2 < 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{10 - 6m} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{10 - 6m} < 4 \Leftrightarrow 10 - 6m < 16 \Leftrightarrow m > -1$.

Vậy ta được $-1 < m < \frac{5}{3}$.

152. Ta có $b + c = 15 - a$ và $bc = a^2 - 15a + 72$ nên b và c là nghiệm của phương trình

$X^2 - (15 - a)X + (a^2 - 15a + 72) = 0$.

Điều kiện $\Delta \geq 0$ cho $a^2 - 10a + 21 \leq 0 \Leftrightarrow (a - 3)(a - 7) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq a \leq 7$.

$\max a = 7 \Leftrightarrow b = c = 4$

Lưu ý. Ta còn có $\min a = 3 \Leftrightarrow b = c = 2$.

153. Tìm giá trị nhỏ nhất:

$A^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 4 - abc + 2ab + 2ac + 2bc$

Xét $M = -abc + 2bc + 2ab + 2ac = bc(2 - a) + 2c(a + b)$.

Từ giả thiết có $a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$ nên $a, b, c \leq 2$ và do $a, b, c \geq 0$ nên $M \geq 0$. Do đó $A^2 \geq 4$ và $A \geq 2$.

$\min A = 2 \Leftrightarrow$ (a; b; c) là hoán vị của (2; 0; 0).

Tìm giá trị lớn nhất:

Theo đề bài $a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4 = 0$. Viết thành phương trình bậc hai với ẩn a được $a^2 + bca + (b^2 + c^2 - 4) = 0$

$\Delta = b^2c^2 - 4(b^2 + c^2 - 4) = b^2c^2 - 4b^2 - 4c^2 + 16 = (4 - b^2)(4 - c^2) \geq 0$.

Do đó $a = \frac{-bc + \sqrt{(4 - b^2)(4 - c^2)}}{2} \Rightarrow 4a = -2bc + 2\sqrt{(4 - b^2)(4 - c^2)}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy: $2\sqrt{(4 - b^2)(4 - c^2)} \leq (4 - b^2 + 4 - c^2) = 8 - b^2 - c^2$

nên $4a \leq -2bc + 8 - b^2 - c^2 = 8 - (b + c)^2$.

Vậy $a \leq 2 - \frac{(b + c)^2}{4}$.

Ta có $A = a + b + c \leq 2 - \frac{(b + c)^2}{4} + (b + c)$. Đặt $b + c = x$ ta có

$A \leq 2 - \frac{x^2}{4} + x = 3 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \leq 3$.

$\max A = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

154. Gọi m là nghiệm của phương trình (1) đã cho thì

$m^4 + 2m^2 + 2am + a^2 + 2a + 1 = 0.$ (2)

Viết (2) dưới dạng phương trình bậc hai với ẩn a:

$a^2 + 2(m + 1)a + (m^4 + 2m^2 + 1) = 0.$ (3)

Scanned with CamScanner

Để tồn tại a, phải có $\Delta' \geq 0$. Giải điều kiện này được $m(m-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.

a) Nghiệm của phương trình đạt giá trị nhỏ nhất là 0 với $a = -1$.

b) Nghiệm của phương trình đạt giá trị lớn nhất là 1 với $a = -2$.

155. Ta có $\Delta = a^2 - 4a + 20 > 0$. Nghiệm lớn của phương trình là

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 20}}{2}. \qquad (1)$$

Ta dự đoán nghiệm đó có giá trị lớn nhất khi xảy ra dấu "=" ở điều kiện $a \geq -1$ của đề bài, tức là với $a = -1$. Với $a = -1$ thì $x = 3$.

Ta sẽ chứng minh với $a > -1$ thì $\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 20}}{2} < 3$. (2)

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4a + 20} < a + 6 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 20 < a^2 + 12a + 36$ (chú ý rằng $a + 6 > 0$)

$\Leftrightarrow -1 < a$, đúng.

Vậy giá trị lớn nhất mà nghiệm của phương trình đã cho đạt được là 3, khi và chỉ khi $a = -1$.

156. Dùng phương pháp miền giá trị của hàm số.

a) $\min A = -\frac{1}{2}$ với $x = -1$; $\max A = \frac{1}{2}$ với $x = 1$.

b) $\min B = 1$ với $x = -2$; $\max B = 6$ với $x = \frac{1}{2}$.

c) $\min C = 3 - 2\sqrt{2}$ với $x = \sqrt{2}$; $\max C = 3 + 2\sqrt{2}$ với $x = -\sqrt{2}$.

d) $\min D = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ với $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; $\max D = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ với $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

157. Gọi a là giá trị tùy ý của A, dẫn đến $(a-2)x^2 - mx + (a - n) = 0$. (1)

Xét $a \neq 0$, tìm điều kiện để (1) có nghiệm, ta sẽ được $4a^2 - 4(n+2)a + (8n - m^2) \leq 0$. (2)

Giải tương tự Ví dụ 57, ta tìm được $n = 5$, $m = \pm 4$.

Khi đó $A = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ hoặc $A = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}$.

158. Biểu thức A nhận giá trị m khi và chỉ khi phương trình ẩn x sau đây có nghiệm: $m = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \Leftrightarrow m - x = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$. (1)

Với $m \geq x > 0$, (1) tương đương với

$$m^2 - 2mx + x^2 = x^2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2mx^2 - m^2x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Ở (2), do $m \neq 0$ nên (2) là phương trình bậc hai.

Giải điều kiện $\Delta \geq 0$ và chú ý rằng $m > 0$ ta được $m \geq 2$.

Scanned with CamScanner

Ta có $m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, thoả mãn điều kiện $0 < x \le m$.

Vậy $\min A = 2$ với $x = \frac{1}{2}$.

b) $B = \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = x^2 + y^2 - 2xy + \frac{1}{(x-y)^2} + 2xy$

$= \left[(x-y)^2 + \frac{1}{(x-y)^2}\right] + 2 \ge 2 + 2 = 4;$

$$\min B = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm 1 \\ xy = 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x; y)$ là hoán vị của $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

c) Đặt $x - y = a$ thì $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = a^2 + 8$.

$C = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{a^2 + 8}{a} \ge \frac{2\sqrt{a^2 \cdot 8}}{a} = 4\sqrt{2}$.

$\min C = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow (x; y)$ là $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}; \sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

d) Đặt $x - y + 1 = a$ thì $x - y = a - 1$,

$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = (a-1)^2 + 8 = a^2 - 2a + 9$.

$D = \frac{a^2 - 2a + 9}{a} = \left(a + \frac{9}{a}\right) - 2 \ge 6 - 2 = 4$.

$\min D = 4 \Leftrightarrow (x; y)$ là $\left(\sqrt{5} + 1; \sqrt{5} - 1\right)$.

159. a) $A = x - y$ nên $y = x - A$. Thay $y = x - A$ vào $x^2 + 4y^2 = 5$ được

$x^2 + 4(x - A)^2 = 5 \Rightarrow 5x^2 - 8Ax + 4A^2 = 5$

$\Rightarrow 5x^2 - 8Ax + (4A^2 - 5) = 0.$

Phải có $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 4A^2 \le 25 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le A \le \frac{5}{2}$.

$\min A = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow (x; y)$ là $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$;

$\max A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x; y)$ là $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$.

Scanned with CamScanner

b) Thay $x = B - 3y$ vào $x^2 + 2xy + 3y^2 = 6$ được

$(B - 2y)^2 + 2(B - 2y)y + 3y^2 = 6 \Leftrightarrow 3y^2 - 2By + (B^2 - 6) = 0$.

Ta phải có $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow B^2 - 3(D^2 - 6) \geq 0 \Leftrightarrow B^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq B \leq 3$.

$\min B = -3 \Leftrightarrow x = y = -1$;

$\max B = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$.

c) Đặt $\frac{x}{y} = a$, đưa về $C = \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1}$.

Giải như Ví dụ 54 được

$\min C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y \neq 0$, $\max C = 3 \Leftrightarrow x = -y \neq 0$.

160. a) Gọi a là giá trị của biểu thức A. Ta có

$\frac{2x^2 + n}{x^2 + 2x + 2} = a \Leftrightarrow 2x^2 + n = ax^2 + 2ax + 2a$

$\Leftrightarrow (a - 2)x^2 + 2ax + (2a - n) = 0$. (1)

Xét $a \neq 2$. Ta có $\Delta' = a^2 - (a - 2)(2a - n) = -a^2 + (4 + n)a - 2n$.

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - (4 + n)a + 2n \leq 0$. (2)

Nghiệm của bất phương trình (2) với ẩn a là các giá trị a thoả mãn $a_1 \leq a \leq a_2$, trong đó a_1 và a_2 là các nghiệm của phương trình $a^2 - (4 + n)a + 2n = 0$. (3)

Với n nguyên dương, nghiệm nguyên của phương trình (3) là $a = 1$ và $a = 6$ ứng với $n = 3$.

b) Giải tương tự câu a. Gọi a là giá trị của B, dẫn đến

$(a - 4)x^2 - 10x + (a - n) = 0$. (1)

Xét $a \neq 4$, tìm điều kiện để (1) có nghiệm, ta sẽ được

$a^2 - (n + 4)a + (4n - 25) \leq 0$. (2)

Nghiệm của bất phương trình (2) với ẩn a là các giá trị a thoả mãn $a_1 \leq a \leq a_2$, trong đó a_1 và a_2 là các nghiệm của phương trình $a^2 - (n + 4)a + (4n - 25) = 0$. (3)

Với n nguyên dương, nghiệm nguyên của (3) là 3 và 29 ứng với $n = 28$, là -1 và 9 ứng với $n = 4$.

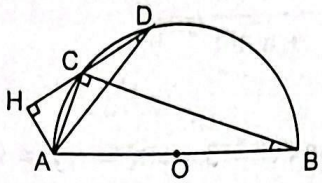
Với $n = 28$ thì $\min B = 3$, $\max B = 29$. Với $n = 4$ thì $\min B = -1$, $\max B = 9$.

Scanned with CamScanner

CHƯƠNG III. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

§1. Góc nội tiếp

1. (h.95)



Hình 95

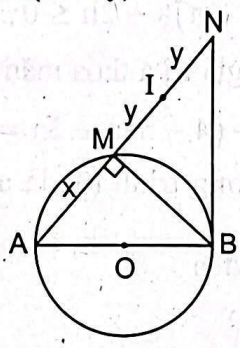
Kẻ $AH \perp CD$.

$\Delta AHD \backsim \Delta ACB$ (g.g)

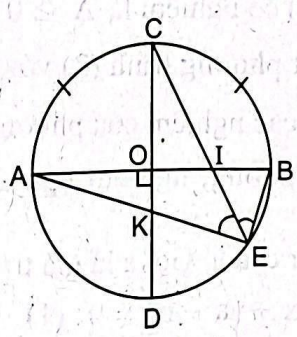
$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{AH}{8} = \dfrac{15}{24} \Rightarrow AH = 5$ (cm).

2. (h.96) Đặt $AM = x$, $MI = IN = y$ $(0 < x, y < 13)$.

Từ $x + y = 13$ và $x(x + 2y) = 12^2$, ta tính được $x = 18$ (loại), $x = 8$. *Đáp số*: $AM = 8$ cm.



Hình 96



Hình 97

3. (h.97) ΔAEB có EI là đường phân giác nên $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{IA}{IB} = 3$.

$\Delta AOK \backsim \Delta AEB$ (g.g) nên $\dfrac{OA}{OK} = \dfrac{EA}{EB} = 3$.

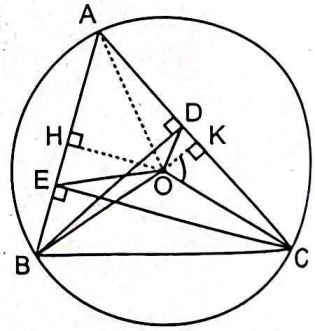
Do đó $OK = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{R}{3}$. Vậy $DK = \dfrac{2}{3}R$.

4. (h.98)

Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$. Ta sẽ chứng minh

$$BE \cdot OH = CD \cdot OK.$$

Ta có $\overset{\frown}{ABC} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm) mà $\overset{\frown}{COK} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$ nên $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{COK}$.



Hình 98

Scanned with CamScanner

$\Delta CBE \backsim \Delta COK$ (g.g) nên $\frac{BE}{OK} = \frac{BC}{OC}$. (1)

Tương tự $\frac{CD}{OH} = \frac{BC}{OB}$. (2)

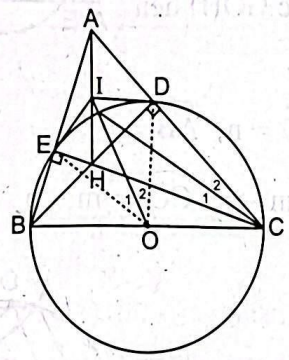
Do OB = OC nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{BE}{OK} = \frac{CD}{OH} \Rightarrow BE \cdot OH = CD \cdot OK$

$\Rightarrow S_{OBE} = S_{OCD}$.

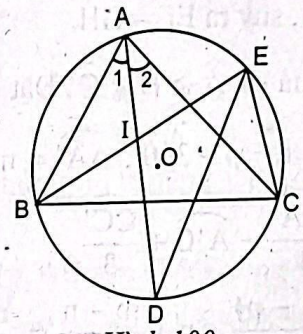
5. (h.99)

$\Delta IOE = \Delta IOD$ (c.c.c) nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Ta lại có $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{O_1}$, $\widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{O_2}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.



Hình 99



Hình 100

6. (h.100) AD // CE $\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DE} \Rightarrow AC = DE$.

$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow AD = BE$.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BE. Ta có

$2AD = AD + BE = IA + IB + ID + IE > AB + DE = AB + AC$.

Suy ra $AD > \frac{AB + AC}{2}$.

Lưu ý. Câu a là gợi ý để giải câu b. Ta vẫn có $AD > \frac{AB + AC}{2}$ nếu bỏ điều kiện tam giác ABC nhọn.

7. (h.101) Gọi O là tâm của nửa đường tròn. Đặt OB = OC = a.

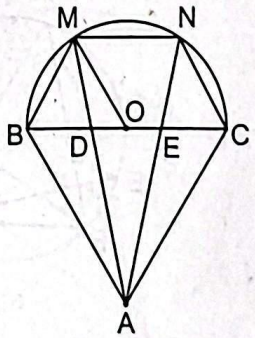
Dễ thấy MOCN là hình thoi cạnh a. Do DE // MN nên

$DE : MN = \frac{2a}{3} : a = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{2}{3}AM \Rightarrow AD = 2DM.$

Ta lại có DC = 2DB nên $\Delta ADC \backsim \Delta MDB$.

Suy ra AC = 2MB = 2a. Tương tự AB = 2a.

Vậy ΔABC đều.



Hình 101

Scanned with CamScanner

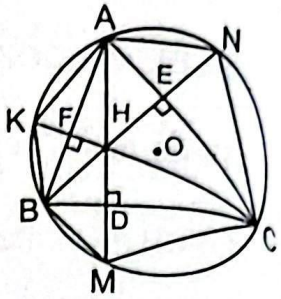
8. (h.102) Gọi H là trực tâm của ΔABC. Kí hiệu $S_{ABC} = S$.

Dễ chứng minh DM = DH. Ta có

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AD + DM}{AD} = 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{DH}{AD} = 1 + \frac{S_{BHC}}{S}.$$

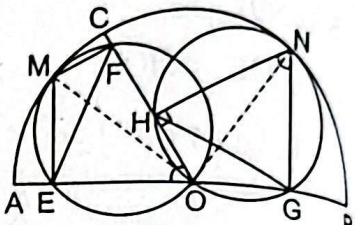
Tương tự $\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{AHC}}{S}$, $\frac{CK}{CF} = 1 + \frac{S_{AHB}}{S}$.

Cộng từng vế ba đẳng thức trên, ta được điều phải chứng minh.



Hình 102

9. (h.103) Không mất tính tổng quát, giả sử $\overset{\frown}{AOC} \le \overset{\frown}{BOC}$. Các điểm O, E, M, F thuộc đường tròn đường kính OM = R. Các điểm O, G, N, H thuộc đường tròn đường kính ON = R. Trong hai đường tròn bằng nhau đó, các góc nội tiếp EOF, GNH bằng nhau (cùng bù với góc GOH) nên $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{GH}$, suy ra EF = GH.



Hình 103

10. (h.104) Giả sử $\hat{A} \ge \hat{B} \ge \hat{C}$. Đặt $\overset{\frown}{BC} = m$, $\overset{\frown}{AC} = n$, $\overset{\frown}{AB} = p$.

Ta có $m + n + p = 360^\circ$, $\overset{\frown}{AA'} = n - p$, $\overset{\frown}{BB'} = m - p$, $\overset{\frown}{CC'} = m - n$.

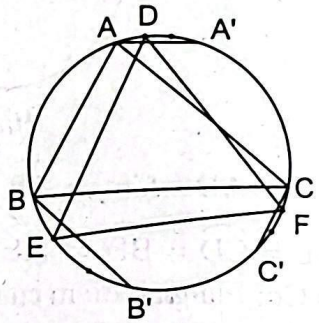
$$\overset{\frown}{DF} = \frac{2\overset{\frown}{AA'}}{3} + \overset{\frown}{A'C} + \frac{\overset{\frown}{CC'}}{3}$$

$$= \frac{2(n-p)}{3} + p + \frac{m-n}{3} = \frac{m+n+p}{3} = 120^\circ.$$

$$\overset{\frown}{DE} = \frac{\overset{\frown}{AA'}}{3} + \overset{\frown}{AB} + \frac{\overset{\frown}{BB'}}{3} = \frac{n-p}{3} + p + \frac{m-p}{3}$$

$$= \frac{m+n+p}{3} = 120^\circ.$$

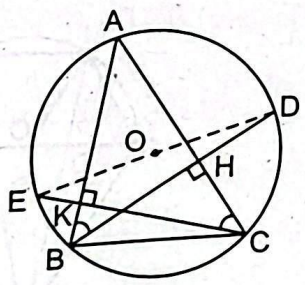
Suy ra $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF}$. Vậy ΔDEF đều.



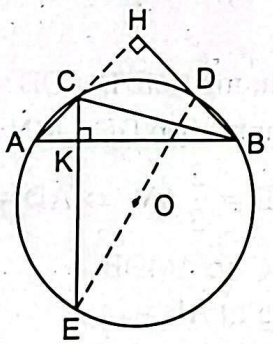
Hình 104

11. (h.105) Nếu $\overset{\frown}{BAC} < 90^\circ$ thì H thuộc tia AC (h.105a, b).

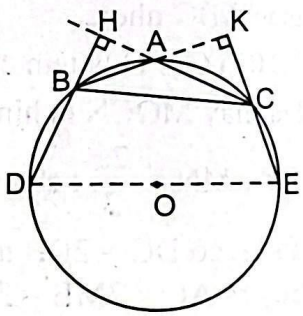
$$\overset{\frown}{ABH} = \overset{\frown}{ACK} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE}.$$



a)



b)



c)

Hình 105

Scanned with CamScanner

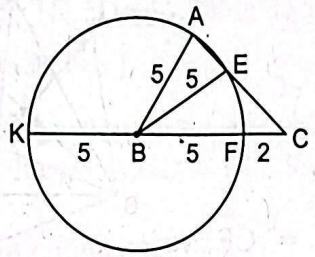
Ta lại có $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AE} = 180^\circ$ nên $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE} = 90^\circ$, do đó $\overset{\frown}{ABH} = 45^\circ$, $\overset{\frown}{BAH} = 45^\circ$.

Ta có $\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BAH} = 45^\circ$.

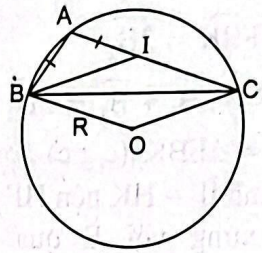
Nếu $\overset{\frown}{BAC} > 90^\circ$ thì H thuộc tia đối của tia AC (h.105c). Bạn đọc tự chứng minh rằng khi đó $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE} = 90^\circ$, $\overset{\frown}{ABH} = 45^\circ$, $\overset{\frown}{BAH} = 45^\circ$, do đó

$$\overset{\frown}{BAC} = 180^\circ - \overset{\frown}{BAH} = 135^\circ.$$

12. (h.106) Vẽ đường tròn (B; BA), cắt AC ở E, cắt cạnh BC ở F và cắt tia đối của tia BC ở K. Ta có BE = 5. Ta tính được AE = 2, CE = 4 dựa vào hệ thức CE.CA = CF.CK. Điểm E là một điểm thoả mãn bài toán.



Hình 106



Hình 107

13. (h.107) Trên AC lấy I sao cho AI = AB. Hãy chứng minh rằng BICO là hình bình hành (còn là hình thoi).

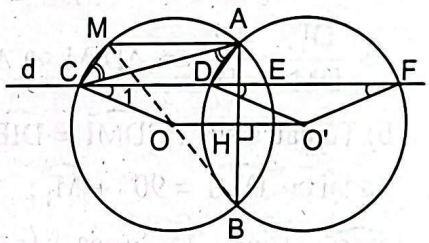
14. (h.108) a) (O) và (O') đối xứng nhau qua AB, mà d ⊥ AB nên C đối xứng với F qua AB, $\hat{C}_1 = \hat{F} = \overset{\frown}{O'DF} \Rightarrow$ OC // O'D. Ta lại có CD // OO'. Suy ra CDO'O là hình bình hành.

b) OO' cắt AB tại H.

Ta có $OH = O'H = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$.

Do đó $CD = OO' = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

c) Kẻ đường kính BOM thì M là điểm cố định. Ta có AM = CD (cùng gấp đôi OH), AM // CD nên AMCD là hình bình hành, suy ra AD // MC, do đó $\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{ACM}$. Vậy $\overset{\frown}{CAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.



Hình 108

15. (h.109) AH và AK là tia phân giác của các góc IAB và IAC nên

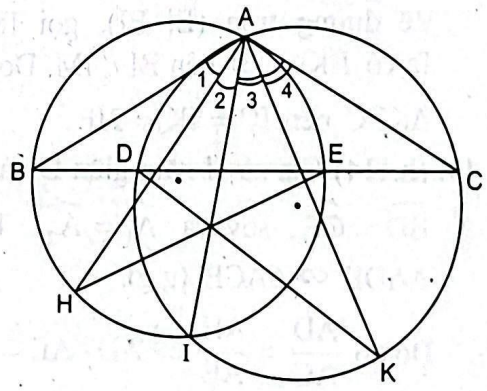
$$\overset{\frown}{HAK} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} \quad (1)$$

ΔABC cân tại A nên $\hat{C} = 90^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{HAK} + \hat{C} = 90^\circ$, do đó $\overset{\frown}{HAK} + \hat{K} = 90^\circ$.

Vậy AH ⊥ KD.

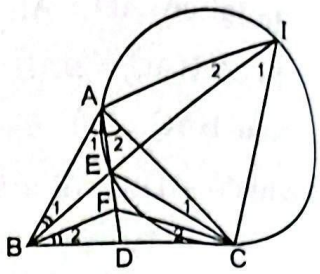
Tương tự AK ⊥ HE.



Hình 109

Scanned with CamScanner

16. (h.110) Giả sử E nằm giữa A và F. Gọi I là giao điểm của BE với đường tròn (AEC). Ta có $\widehat{I_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$ nên $\Delta ABF \backsim \Delta IBC$ (g.g), suy ra $\frac{BF}{BC} = \frac{BA}{BI}$.

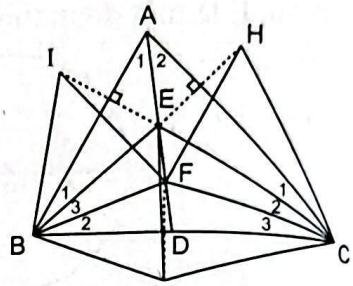


Hình 110

Ta có $\Delta BFC \backsim \Delta BAI$ (c.g.c) nên $\widehat{C_2} = \widehat{I_2}$.

Ta lại có $\widehat{I_2} = \widehat{C_1}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Cách giải khác. (h.111) Vẽ I đối xứng với E qua AB thì BI = EB và $\widehat{IBE} = 2\widehat{B_1}$. Vẽ K đối xứng với F qua BC thì BF = BK và $\widehat{FBK} = 2\widehat{B_2}$.



Hình 111

Ta lại có $\widehat{IBF} = 2\widehat{B_1} + \widehat{B_3} = 2\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = \widehat{EBK}$

suy ra $\Delta IBF = \Delta EBK$ (c.g.c) $\Rightarrow$ IF = EK.

Dễ chứng minh IF = HK nên HF = EK.

Vẽ H đối xứng với E qua AC thì CH = CF và $\widehat{HCF} = 2\widehat{C_1} + \widehat{C_3}$. Ta lại có CH = CE và CF = CK. Suy ra

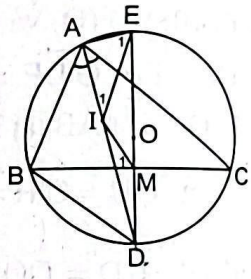
$\Delta HCF = \Delta ECK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{ECK} \Rightarrow 2\widehat{C_1} + \widehat{C_3} = 2\widehat{C_2} + \widehat{C_3} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

17. (h.112)

a) Dễ chứng minh DI = DB và $DB^2 = DM \cdot DE$ nên

$$DI^2 = DM \cdot DE$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{DM} = \frac{DE}{DI} \Rightarrow \Delta DIM \backsim \Delta DEI \text{ (c.g.c).}$$



Hình 112

b) Từ câu a suy ra $\widehat{DMI} = \widehat{DIE}$.

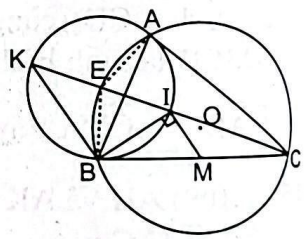
Ta lại có $\widehat{DMI} = 90^\circ + \widehat{M_1}$,

$\widehat{DIE} = 180^\circ - \widehat{I_1} = 180^\circ - \left(90^\circ - \widehat{E_1}\right) = 90^\circ + \widehat{E_1}$.

Vậy $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$.

18. (h.113) Dễ chứng minh EA = EB = EI.

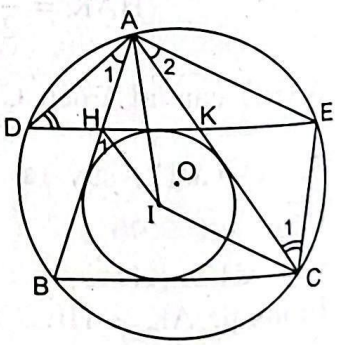
Vẽ đường tròn (E; EI), gọi IK là đường kính của (E). Ta có BK ⊥ BI nên BI // IM. Do IM là đường trung bình của ΔKBC nên IC = IK = 2IE.



Hình 113

19. (h.114) Giả sử H nằm giữa D và K. Ta có BE // BC nên $\widehat{BD} = \widehat{CE}$, suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Ta lại có $\widehat{D} = \widehat{C_1}$ nên $\Delta ADH \backsim \Delta ACE$ (g.g).

Do đó $\frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AH \cdot AC$ (1)



Hình 114

Scanned with CamScanner

Ta có $\widehat{AHI} = 180^0 - \widehat{H_1} = 180^0 - \dfrac{180^0 - \hat{B}}{2} = 90^0 + \dfrac{\hat{B}}{2} = \widehat{AIC}$.

$\Delta AHI \backsim \Delta AIC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AI}{AC} \Rightarrow AH \cdot AC = AI^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AD \cdot AE = AI^2$.

20. (h.115) *Cách 1.* BP cắt CM tại I. Ta có A, I, N thẳng hàng.

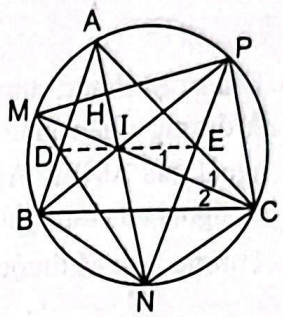
Dễ chứng minh PI = PC.

Tương tự NI = NC. Do đó PN là đường trung trực của IC

$\Rightarrow IE = CE \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{I}_1$.

Ta lại có $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ nên $\hat{I}_1 = \hat{C}_2$, do đó IE // BC.

Chứng minh tương tự, ID // BC. Suy ra D, I, E thẳng hàng và DE // BC.



Hình 115

Cách 2. (không dùng đến điểm I)

NE là đường phân giác của $\Delta ANC \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AN}{NC}$. (1)

ND là đường phân giác của $\Delta ANB \Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AN}{NB}$. (2)

Dễ dàng chứng minh được NB = NC. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DB}$, do đó DE // BC.

21. (h.116) Do đối xứng nên $\widehat{AD} = \widehat{AF} \Rightarrow$ EA là phân giác của góc $\widehat{CEK}$.

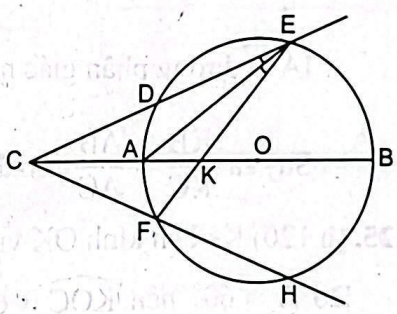
Do $EB \perp EA$ nên EB là phân giác ngoài của ΔCEK.

Suy ra

$\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{BK}{BC} \Rightarrow \dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow AK = \dfrac{1}{3}BK = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{1}{2}OA$.

Vậy AK = OK.



Hình 116

22. (h.117)

a) $\widehat{DC} = \widehat{DB} \Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{C_1}$.

$\Delta DEC \backsim \Delta DCH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DC}{DH} = \dfrac{DE}{DC} \Rightarrow DC^2 = DH \cdot DE$.

Dễ chứng minh DK = DC nên $DK^2 = DH \cdot DE$.

b) $DK^2 = DH \cdot DE \Rightarrow \dfrac{DK}{DE} = \dfrac{DH}{DK} \Rightarrow \Delta DKE \backsim \Delta DHK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{K_1}$.

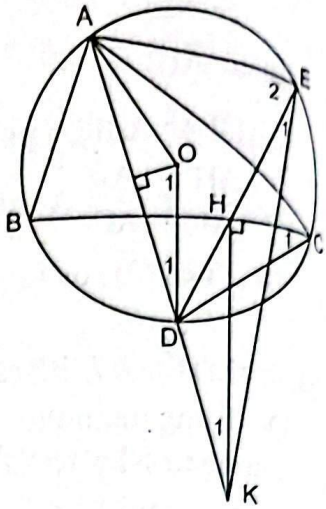
Scanned with CamScanner

Ta lại có $\widehat{K_1} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$ (1)

$\widehat{E_2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOD} = \widehat{O_1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{D_1} + \widehat{O_1} = 90^\circ$.

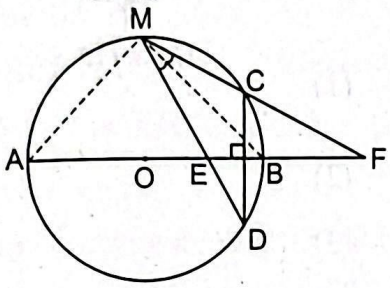
Vậy $\widehat{AEK} = 90^\circ$.



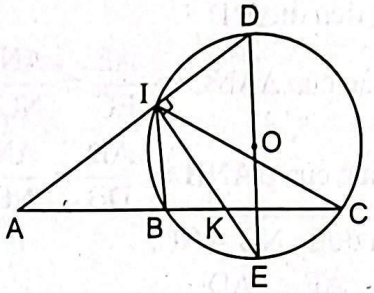
Hình 117

23. Giả sử M thuộc cung lớn CD (h.118). Chứng minh rằng MB là đường phân giác trong, do đó MA là đường phân giác ngoài của ΔMEF. Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác.

Trường hợp M thuộc cung nhỏ CD, chứng minh tương tự.



Hình 118



Hình 119

24. (h.119). IK là đường phân giác trong của ΔIBC nên $\frac{KB}{KC} = \frac{IB}{IC}$.

IA là đường phân giác ngoài của ΔIBC nên $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$.

Suy ra $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$, do đó AC.BK = AB.KC.

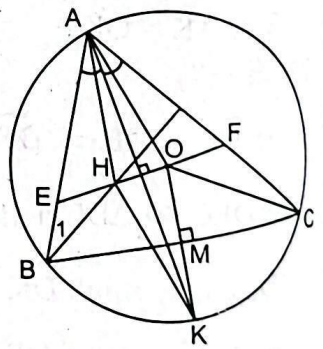
25. (h.120) Kẻ bán kính OK vuông góc với BC tại M.

Do $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\overset{\frown}{KOC} = 60^\circ$, ΔKOC đều, OM = MK.

Ta chứng minh được AH = 2OM (Ví dụ 2) nên AH = OK. Tứ giác AHKO có AH // OK, AH = OK nên là hình bình hành, lại có OA = OK nên là hình thoi, suy ra OH ⊥ AK.

ΔAEF có tia phân giác góc A vuông góc với EF nên là tam giác cân, lại có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, suy ra $\overset{\frown}{AEF} = 60^\circ$.

Ta lại có $\widehat{B_1} = 30^\circ$ (vì $\widehat{B_1}$ phụ $\widehat{BAC}$) nên ΔEBH cân tại E, suy ra EB = EH. Tương tự FC = FH. Vậy EF = BE + CF.



Hình 120

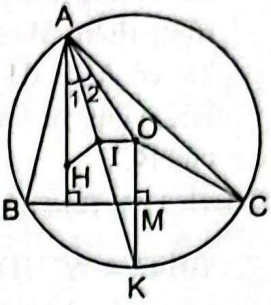
Scanned with CamScanner

26. (h.121) a) Gọi K là giao điểm của AI và đường tròn. Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ vì cùng bằng $\widehat{K}$.

b) Với ΔABC nội tiếp đường tròn (O), ta chứng minh được AH gấp đôi khoảng cách OM từ O đến BC. Ta lại có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{KOC} = 60^\circ$, do đó $OM = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA$.

Suy ra AH = AO.

ΔAIH = ΔAIO (c.g.c) nên IH = IO.



Hình 121

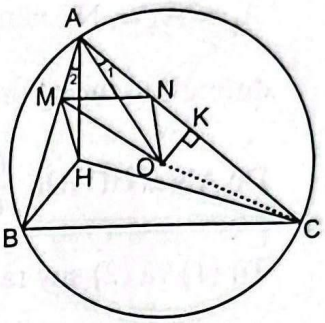
27. (h.122) a) Kẻ OK ⊥ AC. Ta có $\widehat{A_1}$ phụ $\widehat{AOK}$, $\widehat{A_2}$ phụ $\widehat{ABC}$, mà $\widehat{AOK} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, suy ra $\widehat{OAM} = \widehat{CAH}$ (1)

Các tam giác cân OAC và MAH có góc đáy bằng nhau ($\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$) nên đồng dạng, suy ra $\frac{OA}{MA} = \frac{AC}{AH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔOAM ∽ ΔCAH (c.g.c).

b)Từ câu a suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{ACH}$. Tương tự $\widehat{AON} = \widehat{ABH}$, mà $\widehat{ACH} = \widehat{ABH}$ nên $\widehat{AOM} = \widehat{AON}$.

Vậy OA là tia phân giác của góc MON.



Hình 122

28. (h.123)

a) Ta có $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ và $\widehat{B_1} = \widehat{BMN} = \frac{1}{2}\widehat{AMH}$ nên $\widehat{AMH} = \widehat{AOC}$ suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Do đó ΔAMH ∽ ΔAOC (g.g) nên $\frac{AM}{AO} = \frac{AH}{AC}$. (1)

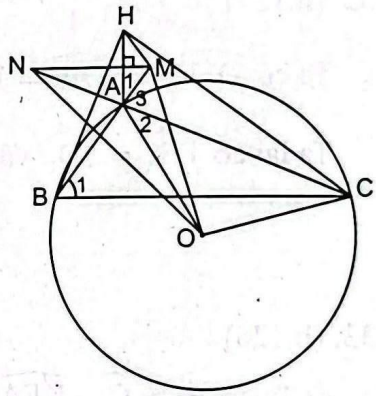
Do $\widehat{A_2} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{OAM} = \widehat{CAH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔOAM ∽ ΔCAH (c.g.c).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{ACH}$.

Tương tự $\widehat{AON} = \widehat{ABH}$.

Ta lại có $\widehat{ACH} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ $\widehat{BHC}$) nên $\widehat{AOM} = \widehat{AON}$, tức là OA là tia phân giác của góc MON.



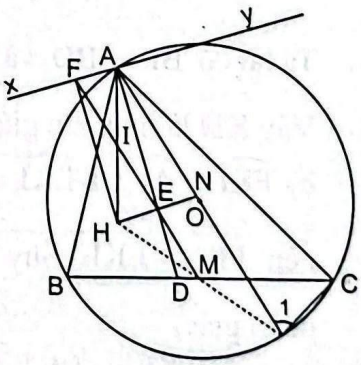
Hình 123

29. (h.124) Gọi I là giao điểm của EF và AH. Ta có AEHF là hình chữ nhật nên IA = IH. (1)

Vẽ đường kính AOK. Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{K_1}$ nên $\widehat{HAB} = \widehat{KAC}$, suy ra $\widehat{EAH} = \widehat{EAK}$.

Gọi N là giao điểm của HE và AK thì ΔAHN cân nên EH = EN. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IE là đường trung bình của ΔAHN nên IE // AK.

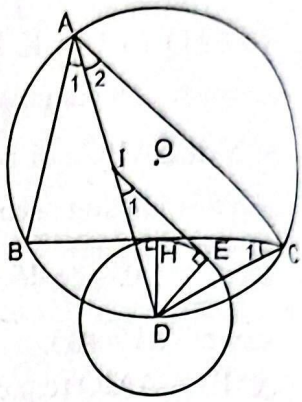


Hình 124

Scanned with CamScanner

Dễ chứng minh BHCK là hình bình hành nên HK đi qua trung điểm M của BC.

Ta có AI = IH và IE // AK nên IE đi qua trung điểm M của HK, cũng là trung điểm của BC. Vậy FE đi qua trung điểm của BC.



Hình 125

30. (h.125) Bạn đọc tự chứng minh DI = DC.

$\Delta IED = \Delta CHD$ (c.g.c) nên $\widehat{I_1} = \widehat{C_1}$.

Ta lại có $\widehat{C_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{A_2}$. Vậy IE // AC.

31. (h.126)

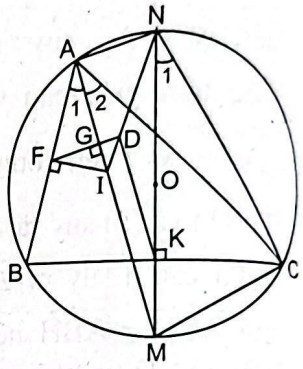
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{N_1}$ nên $\Delta AFI \backsim \Delta NCM$ (g.g), FG và CK là các đường cao tương ứng nên $\dfrac{AG}{GI} = \dfrac{NK}{KM}$. (1)

Do AN // GD nên $\dfrac{AG}{GI} = \dfrac{ND}{DI}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{NK}{KM} = \dfrac{ND}{NI}$,

do đó DK // IM, tức là DK // AM.

Ta lại có FD ⊥ AM nên FD ⊥ DK. Vậy $\widehat{FDK} = 90^\circ$.

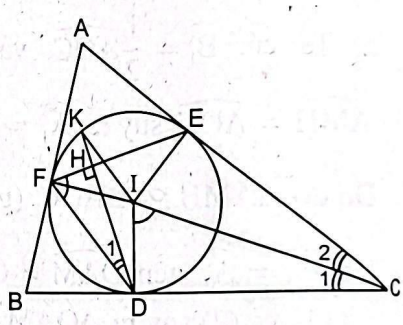


Hình 126

32. (h.127)

Ta có $\overset{\frown}{DFE} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{DIE} = \widehat{I_1}$ nên $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$.

Ta lại có $\widehat{FIK} = 2\widehat{D_1}$ và $\widehat{C} = 2\widehat{C_1}$ nên $\widehat{FIK} = \widehat{C}$.



Hình 127

33. (h.128)

a) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$, $\overset{\frown}{KFA} = \overset{\frown}{KEA}$ nên

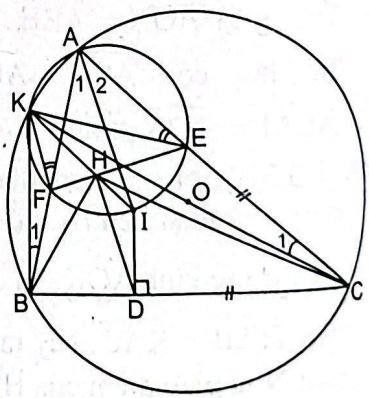
$\Delta KFB \backsim \Delta KEC$ (g.g) suy ra $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{BF}{CE}$.

Ta lại có BF = BD và CE = CD nên $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{BD}{CD}$.

Vậy KD là tia phân giác của góc BKC.

b) $\overset{\frown}{FKI} = \widehat{A_1}$ và $\overset{\frown}{EKI} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp) mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\overset{\frown}{FKI} = \overset{\frown}{EKI}$. Suy ra $\dfrac{HF}{HE} = \dfrac{KF}{KE}$ (tính chất đường phân giác).

Ta lại có $\dfrac{KF}{KE} = \dfrac{BF}{CE}$ (do $\Delta KFB \backsim \Delta KEC$)



Hình 128

Scanned with CamScanner

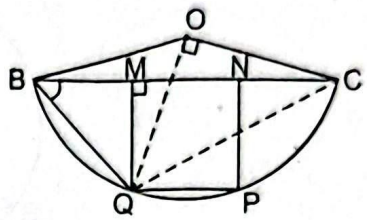
nên $\frac{HF}{HE} = \frac{BF}{CE}$. Suy ra $\Delta BFH \backsim \Delta CEH$ (c.g.c)

nên $\frac{HB}{HE} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}$. Do đó HD là tia phân giác của góc BHC, tức là $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

Ta lại có $\widehat{BHF} = \widehat{CHE}$ (do $\Delta BFH \backsim \Delta CEH$) nên $\widehat{DHF} = \widehat{CHE}$. Do đó $DH \perp EF$.

34. (h.129) Gọi O là tâm của đường tròn chứa cung BC, MNPQ là hình vuông nội tiếp viên phân. Dễ thấy

$$BM = MN = NC = 2 \text{ (cm)}.$$



Hình 129

Do đó ΔBMQ vuông cân, $\widehat{B} = 45^\circ$.

ΔQMC vuông nên

$$QC^2 = QM^2 + MC^2 = 4 + 16 = 20,$$

suy ra $QC = 2\sqrt{5}$.

Góc nội tiếp $\widehat{B} = 45^\circ$ nên góc ở tâm $\widehat{COQ} = 90^\circ$.

ΔCOQ vuông cân nên $OC = \frac{QC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$ (cm).

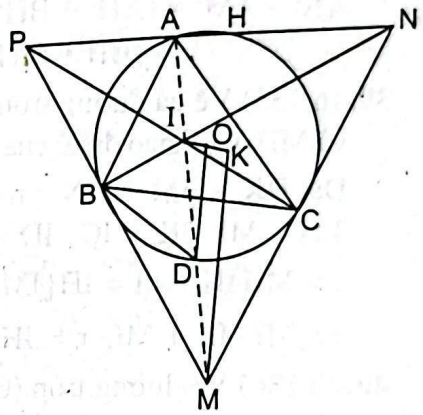
35. (h.130) Gọi D là giao điểm của AM với đường tròn (O). Chứng minh các tam giác DBI, DBM cân suy ra DI = DM.

Do đó OD là đường trung bình của ΔMIK, suy ra

$$KM = 2OD = 2R.$$

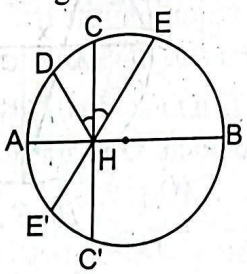
Vậy M thuộc đường tròn (K; 2R). Tương tự đối với các điểm N và P.

Chú ý: Đường tròn (O) đi qua chân ba đường cao của ΔMNP nên là đường tròn Euler của tam giác đó. Theo tính chất của đường tròn Euler, trung điểm H của NP thuộc đường tròn. Từ đó suy ra "Trung điểm của đoạn nối tâm hai đường tròn bàng tiếp tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó" (Bài tập 165).

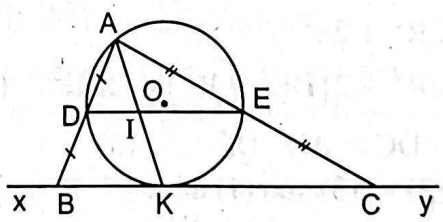


Hình 130

36. (h.131) Vẽ cả đường tròn đường kính AB. Gọi C', E' theo thứ tự là giao điểm của CH, EH với đường tròn. Ta có $HD.HE = HE'.HE = HC.HC' = HC^2$.



Hình 131



Hình 132

37. (h.132) Để có một tam giác như đề bài, chỉ cần vẽ đường tròn (O), tiếp tuyến xy, K là tiếp điểm. Lấy một điểm A tuỳ ý trên (O), vẽ đường thẳng song song với xy và cách

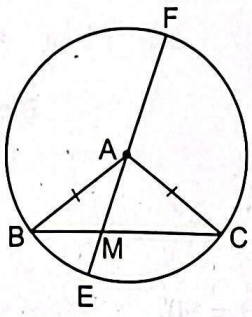
Scanned with CamScanner

xy một khoảng bằng một nửa khoảng cách từ A đến xy, đường thẳng này cắt (O) tại D và E.

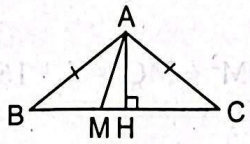
Gọi I là giao điểm của AK và DE. Đặt IA = IK = a. Từ hệ thức IA.IK = ID.IE dễ dàng suy ra $a^2 = ID.IE \Rightarrow 4a^2 = 2ID.2IE \Rightarrow KA^2 = BK.KC$.

38. Kẻ đường kính EF đi qua M (h.133). Ta có

$$MB.MC = ME.MF = (AE - AM)(AF + AM) = (AB - AM)(AB + AM)$$
$$= AB^2 - AM^2.$$



Hình 133



Hình 134

Chú ý: Cách giải sau không dùng đến kiến thức về góc nội tiếp: Kẻ đường cao AH. Giả sử BM ≤ MC (h.134). Ta có

$AB^2 - AM^2 = (AH^2 + BH^2) - (AH^2 + MH^2) = BH^2 - MH^2$

$= (BH + MH)(BH - MH) = (CH + MH).MB = MC.MB.$

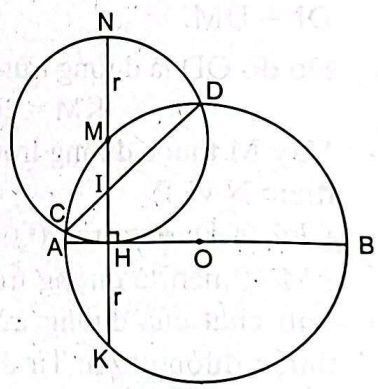
39. (h.135) Vẽ cả đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của CD và MH. Gọi giao điểm của MH với (M) là N, với (O) là K.

Đặt HK = HM = MN = r.

Ta có $MI \cdot IK = IC \cdot ID = IH \cdot IN$

$\Rightarrow MI(IH + r) = IH(IM + r)$

$\Rightarrow MI \cdot IH + MI \cdot r = IH \cdot IM + IH \cdot r \Rightarrow MI = IH$.



Hình 135

40. (h.136) Vẽ đường tròn (O;R) ngoại tiếp ΔABC. Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn.

Ta có $\dfrac{1}{BD^2} + \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{BD^2 + DC^2}{BD^2 \cdot DC^2}$. (1)

Giả sử AB ≤ AC. Đặt OD = x.

Ta có $BD^2 + DC^2 = (R - x)^2 + (R + x)^2$

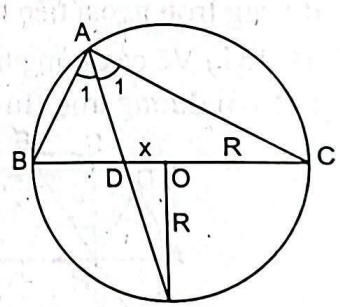
$= 2R^2 + 2x^2$

$= 2R^2 + 2(DE^2 - R^2) = 2DE^2$ (2)

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) được

$$\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{2DE^2}{AD^2 \cdot DE^2} = \frac{2}{AD^2}.$$



Hình 136

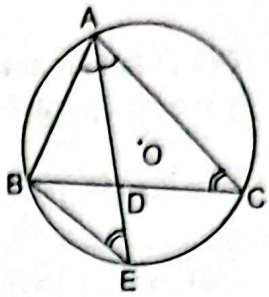
Scanned with CamScanner

41. (h.137) $\Delta ABE \backsim \Delta ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE = AD(AD + DE)$$

$$= AD^2 + AD.DE = AD^2 + DB.DC.$$

Suy ra $AD^2 = AB.AC - DB.DC$.



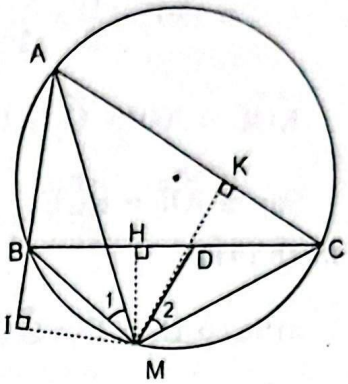
Hình 137

42. (h.138) Lấy điểm D trên CB sao cho $\overset{\frown}{CMD} = \overset{\frown}{AMB}$.

$\Delta AMB \backsim \Delta CMD$ (g.g) có MI và MH là các đường cao tương ứng nên $\frac{AB}{MI} = \frac{CD}{MH}$. (1)

Tương tự $\Delta CMA \backsim \Delta DMB$ nên $\frac{AC}{MK} = \frac{BD}{MH}$. (2)

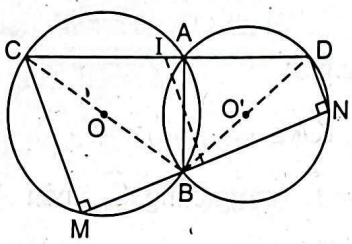
Cộng (1) với (2) được $\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{CD + BD}{MH} = \frac{BC}{MH}$.



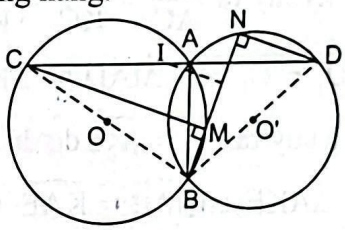
Hình 138

43. (h.139) Kẻ các đường kính BOC, BO'D thì C, A, D thẳng hàng, CAD là cát tuyến chung cố định.

Trường hợp M thuộc cung BC không chứa A (h.139a): $\overset{\frown}{ABN} = \overset{\frown}{ACM}$, $\overset{\frown}{ACM}$ bù $\overset{\frown}{ABM}$ nên $\overset{\frown}{ABN}$ bù $\overset{\frown}{ABM}$, do đó M, B, N thẳng hàng.



a)



b)

Hình 139

Trường hợp M thuộc cung BC chứa A (h.139b): $\overset{\frown}{ABN} = \overset{\frown}{ABM}$ nên M, B, N thẳng hàng.

Trong cả hai trường hợp, ta có CM và DN cùng vuông góc với MN. Do đó đường trung trực của MN đi qua trung điểm I của CD, đó là điểm cố định.

44. (h.140) a) ΔBAI cân tại B, BO là tia phân giác góc B nên O thuộc đường trung trực của AI. Tương tự O thuộc đường trung trực của OK. Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAIK nên OI = OK.

b) $\overset{\frown}{IAK} = \overset{\frown}{BAI} + \overset{\frown}{CAK} - \overset{\frown}{BAC}$

$$= \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}\right) - \left(180^\circ - \hat{B} - \hat{C}\right) = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}.$$

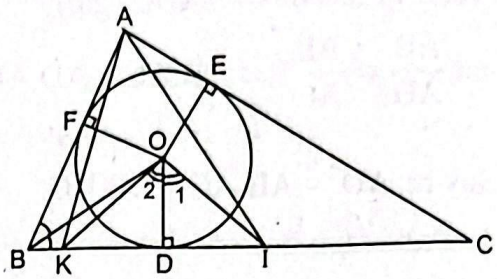
Scanned with CamScanner

Gọi D là tiếp điểm (O) trên BC. Do $\widehat{IAK}$ là góc nội tiếp của đường tròn (O;OK) nên

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \widehat{IAK} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}.$$

$$\widehat{IOF} = \widehat{O_1} + \widehat{DOF} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} + \left(180^o - \hat{B}\right)$$

$$= 180^o - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}.$$



Hình 140

$$\widehat{KOE} = 360^o - \widehat{O_2} - \widehat{DOE} = 360^o - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} - \left(180^o - \hat{C}\right) = 180^o - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{IOF} = \widehat{KOE}$.

45. (h.141)

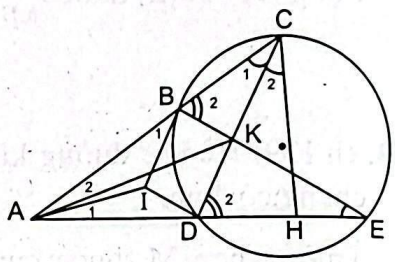
a) Ta có $\widehat{D_1} = \hat{E} = \widehat{C_1}$, ta sẽ chứng minh $\frac{AD}{AC} = \frac{DI}{CK}$.

Vẽ H trên DE sao cho CD là tia phân giác của $\widehat{ACH}$ thì $\frac{AD}{AC} = \frac{HD}{HC}$. (1)

$\Delta HDC \backsim \Delta KBC$ (g.g) nên $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{KB}{KC} = \frac{DI}{KC}$.

Ta lại có $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ nên $\Delta IAD \backsim \Delta KAC$ (c.g.c)



Hình 141

b) Từ câu a suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, do đó $\widehat{IAB} = \widehat{KAE}$.

ΔAIB và ΔAKE có $\widehat{IAB} = \widehat{KAE}$ và $\widehat{B_1} = \hat{E}$ (cùng bằng $\widehat{C_1}$) nên $\widehat{AIB} = \widehat{AKE}$.

46. (h.142)

a) $\widehat{AKF} = \widehat{AEF} = \hat{B}$ và $\widehat{FAK} = \widehat{MAB}$

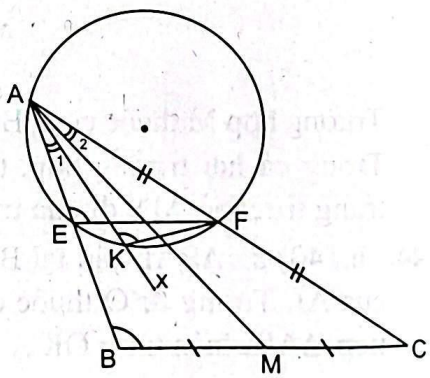
nên $\Delta FAK \backsim \Delta MAB$ (g.g) (1) và $\widehat{AFK} = \widehat{AMB}$.

b) $\widehat{AFK} = \widehat{AMB}$ nên $\widehat{CFK} = \widehat{AMC}$. (2)

Từ (1) suy ra $\frac{AF}{FK} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{CF}{FK} = \frac{AM}{MC}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\Delta CFK \backsim \Delta AMC$ (c.g.c)

nên $\widehat{FCK} = \widehat{MAC} = \alpha$.



Hình 142

Scanned with CamScanner

47. (h.143) a) Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{M_1}$ nên $\overset{\frown}{CED} = \overset{\frown}{CMA}$.

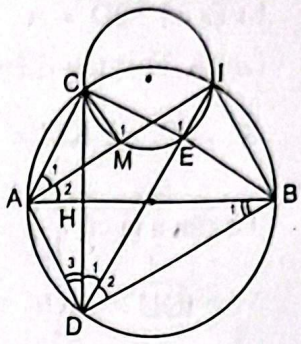
Ta lại có $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ nên $\Delta CED \backsim \Delta CMA$ (g.g).

b) Ta sẽ chứng minh $\Delta DEB \backsim \Delta AIB$.

Hai tam giác này có $\widehat{D_2} = \widehat{A_2}$.

Từ câu a suy ra

$$\frac{DE}{AM} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow \frac{DE}{\frac{1}{2}AI} = \frac{2CH}{CA} \Rightarrow \frac{DE}{AI} = \frac{CH}{CA} = \frac{DH}{DA} \quad (1)$$



Hình 143

$$\frac{BD}{BA} = \cos\widehat{B_1} = \cos\widehat{D_3} = \frac{DH}{DA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{AI} = \frac{BD}{BA}$, từ đó $\Delta DEB \backsim \Delta AIB$ (c.g.c) nên

$\overset{\frown}{DEB} = \overset{\frown}{AIB} = 90^\circ$.

48. (h.144)

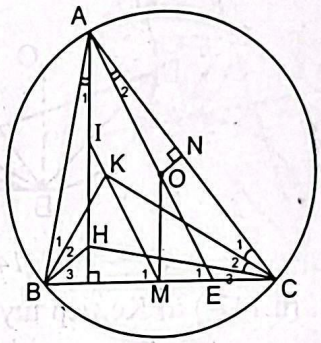
a) Kẻ $ON \perp AC$. Ta có $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{AON}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

b) Do $CH \perp AB$ nên $\widehat{B_3} + \widehat{B_2} + \widehat{B_1} + \widehat{C_3} = 90^\circ$.

Ta lại có. $\overset{\frown}{ABH} = \overset{\frown}{ACH}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$.

Suy ra $\widehat{B_3} + \widehat{B_2} + \widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 90^\circ$.

Do đó $\overset{\frown}{BKC} = 90^\circ$.



Hình 144

c) Gọi E là giao điểm của AO và BC.

Ta sẽ chứng minh $\widehat{E_1} = \widehat{M_1}$.

ΔBKC vuông có KM là đường trung tuyến $\Rightarrow MK = MC \Rightarrow \widehat{M_1} = 2\widehat{KCB}$,

$\widehat{E_1} = \widehat{A_2} + \widehat{C_3} + \widehat{C_2} + \widehat{C_1}$ mà $\widehat{C_3} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ và $\widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ nên

$\widehat{E_1} = 2\left(\widehat{C_3} + \widehat{C_2}\right) = 2\overset{\frown}{KCB}$. Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$, do đó MK // OA.

d) Gọi I là giao điểm của MK và AH. Ta có OAIM là hình bình hành nên AI = OM. Dễ chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$ nên $AI = \frac{1}{2}AH$. Vậy MK đi qua trung điểm I của AH.

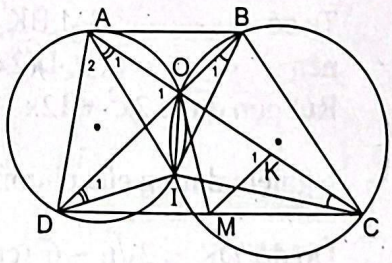
49. (h.145)

a) $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow \Delta AIC \backsim \Delta DIB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{BD}$ (1)

Ta lại có AB // CD $\Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = \frac{OC + OA}{OD + OB} = \frac{AC}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{OC}{OD}$



Hình 145

Scanned with CamScanner

b) Ta có $\widehat{IOD} = \widehat{A_2}$. Sẽ chứng minh $\widehat{A_2} = \widehat{MOC}$.

Gọi K là trung điểm của OC, MK là đường trung bình của ΔOCD nên MK // OD,

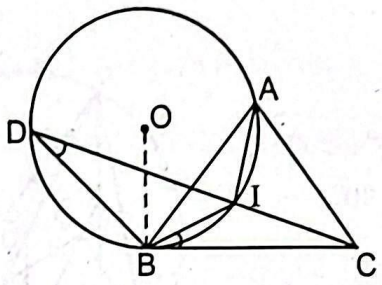
$\widehat{K_1} = \widehat{O_1}$ và $KM = \frac{1}{2}OD$.

Từ câu a ta có $\frac{IA}{ID} = \frac{OC}{OD} = \frac{OK}{KM}$ nên $\Delta IAD \sim \Delta KOM$ (c.g.c) do đó $\widehat{A_2} = \widehat{MOK}$.

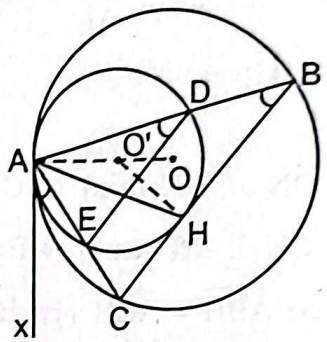
Vậy $\widehat{IOD} = \widehat{MOK} = \widehat{MOC}$.

§2. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây

50. (h.146) Lần lượt chứng minh $\widehat{IBC} = \widehat{IAB} = \widehat{IDB} = \widehat{ICA}$.



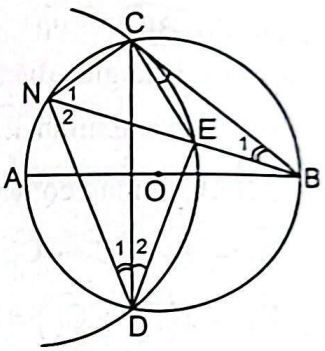
Hình 146



Hình 147

51. (h.147) a) Kẻ tiếp tuyến chung Ax của hai đường tròn. Ta có $\widehat{B} = \widehat{ADE}$ (cùng bằng $\widehat{CAx}$) nên DE // BC.

b) DE // BC mà BC ⊥ O'H nên DE ⊥ O'H. Suy ra $\widehat{HD} = \widehat{HE}$, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$. Vậy AH là tia phân giác của góc BAC.



Hình 148

52. (h.148) a) $\widehat{CEN} = \widehat{ECB} + \widehat{B_1} = \widehat{D_2} + \widehat{D_1} = \widehat{EDN}$.

b) Ta lại có $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$ nên $\Delta CEN \backsim \Delta EDN$ (g.g), suy ra $\frac{NE}{ND} = \frac{NC}{NE}$. Vậy $NE^2 = NC.ND$.

53. (h.149) Gọi M là giao điểm của DK với nửa đường tròn. Dễ thấy ΔCDK cân.

Đặt $DM = MK = x > 0$.

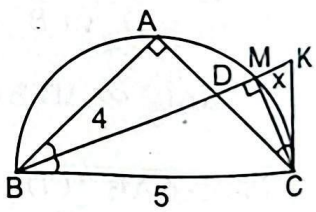
Ta có $BM.BK = BC^2$,

nên $(x + 4)(2x + 4) = 25$.

Rút gọn được $2x^2 + 12x - 9 = 0$.

Nghiệm dương của phương trình là $x = \frac{3\sqrt{6} - 6}{2}$.

Do đó $DK = 3\sqrt{6} - 6$ (cm), $BK = 3\sqrt{6} - 2$ (cm).



Hình 149

Scanned with CamScanner

54. (h.150)

a) Ta có $\overset{\frown}{CBD} = 2\overset{\frown}{IBC}$ nên $\overset{\frown}{ABD} = \alpha + 2\overset{\frown}{IBC}$ (1)

$\overset{\frown}{BCE} = 2\overset{\frown}{ICB}$ nên $\overset{\frown}{ACE} = 360^\circ - \alpha - 2\overset{\frown}{ICB}$

Ta lại có $360^\circ = 2\left(\hat{I} + \overset{\frown}{IBC} + \overset{\frown}{ICB}\right)$

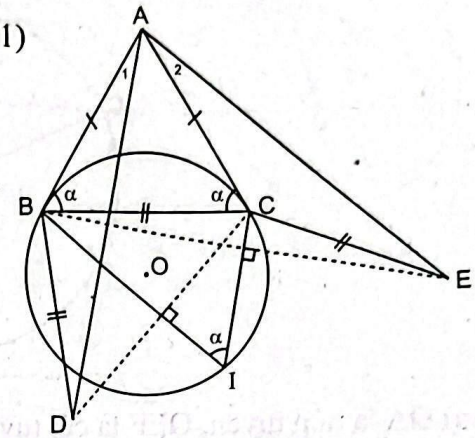
$= 2\left(\alpha + \overset{\frown}{IBC} + \overset{\frown}{ICB}\right)$

nên $\overset{\frown}{ACE} = 2\left(\alpha + \overset{\frown}{IBC} + \overset{\frown}{ICB}\right) - \alpha - 2\overset{\frown}{ICB}$

$= \alpha + 2\overset{\frown}{IBC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{ACE}$.

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c) nên $AD = AE$.



Hình 150

b) $\Delta ABD = \Delta ACE$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Từ đó $\overset{\frown}{DAE} = \overset{\frown}{BAC} = 180^\circ - 2\alpha$.

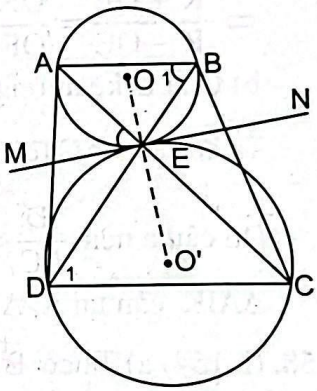
55. (h.151) Gọi EM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAEB, EN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCED.

Hai đường tròn tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ M, E, N thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AEM} = \overset{\frown}{CEN}$.

Ta lại có $\overset{\frown}{AEM} = \hat{B}_1$, $\overset{\frown}{CEN} = \hat{D}_1$ nên

$\overset{\frown}{AEM} = \overset{\frown}{CEN} \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Leftrightarrow AB \,//\, CD$.



Hình 151

56. (h.152)

a) Ta có $\widehat{E_1} = \hat{B}$, $\widehat{A_1} = \hat{C}$ nên $\Delta AED \sim \Delta CBA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AD}{CA} \Rightarrow \dfrac{DE}{2} = \dfrac{AD}{3}$ (1)

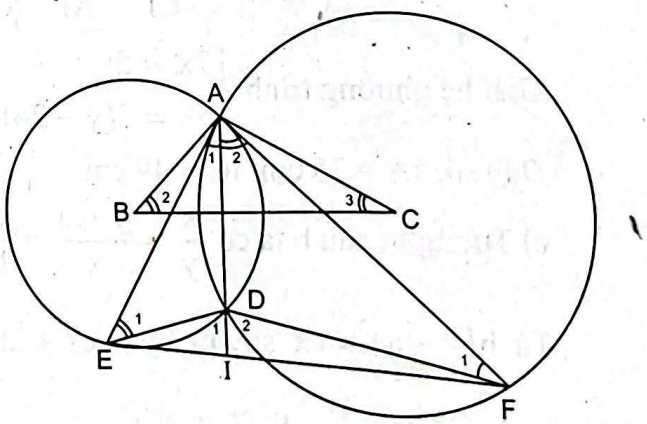
$\widehat{F_1} = \hat{C}$, $\widehat{A_2} = \hat{B}$

nên $\Delta FAD \backsim \Delta CBA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DF}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{DF}{3} = \dfrac{AD}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{DE}{4} = \dfrac{AD}{6} = \dfrac{DF}{9}$.

Vậy $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{4}{9}$.



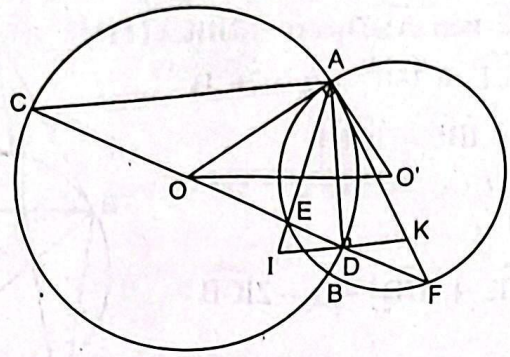
Hình 152

b) $\widehat{D_1} = \widehat{A_1} + \widehat{E_1} = \widehat{F_1} + \widehat{A_2} = \widehat{D_2}$.

DI là đường phân giác của ΔDEF nên $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{4}{9}$.

Scanned with CamScanner

57. (h.153)



Hình 153

a) OA là tiếp tuyến, OEF là cát tuyến của (O') nên $OA^2 = OE \cdot OF$.

Đặt $OA = OC = OD = R$ thì $R^2 = OE \cdot OF \Rightarrow \dfrac{R}{OE} = \dfrac{OF}{R}$

$\Rightarrow \dfrac{R + OE}{R - OE} = \dfrac{OF + R}{OF - R} \Rightarrow \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{FC}{FD}$.

b) Qua D kẻ đường vuông góc với AD, cắt AE và AF ở I và K.

Ta có IK // AC (cùng vuông góc với AD) nên $\dfrac{ID}{AC} = \dfrac{ED}{EC}$, $\dfrac{DK}{AC} = \dfrac{FD}{FC}$.

Do câu a nên $\dfrac{ID}{AC} = \dfrac{DK}{AC}$, vậy ID = DK.

ΔAIK cân tại A, AD là phân giác trong và AC là phân giác ngoài của góc EAF.

58. (h.154) a) Ta có $\widehat{BAI} = \hat{C}$, ΔBAI ∽ ΔACI (g.g)

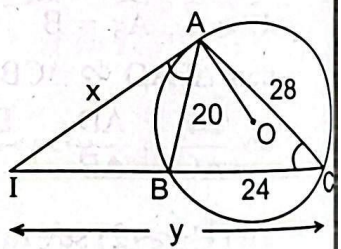
$\Rightarrow \dfrac{IA}{IC} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \dfrac{IA \cdot IB}{IC \cdot IA} = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

b) Đặt IA = x, IC = y. Ta có

ΔBAI ∽ ΔACI (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{CI} = \dfrac{BI}{AI} = \dfrac{AB}{CA} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y - 24}{x} = \dfrac{20}{28} = \dfrac{5}{7}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x = 5y \\ 5x = 7(y - 24) \end{cases}$ được $\begin{cases} x = 35 \\ y = 49 \end{cases}$

Đáp số: IA = 35 cm, IC = 49 cm.



Hình 154

c) Tương tự câu b ta có $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y - a}{x} = \dfrac{c}{b}$.

Từ $b(y - a) = cx$ suy ra $by = cx + ab \Rightarrow \dfrac{cx + ab}{b}$

Do đó $bx = cy = \dfrac{c(cx + ab)}{b} \Rightarrow b^2x - c^2x = abc \Rightarrow x = \dfrac{abc}{b^2 - c^2}$.

Ta có $y = \dfrac{bx}{c} = \dfrac{ab^2}{b^2 - c^2}$.

Scanned with CamScanner

59. (h.155)

a) $\widehat{D_1} = \widehat{A_1} + \widehat{C} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} \Rightarrow \Delta AID$ cân

$\Rightarrow IA = ID$.

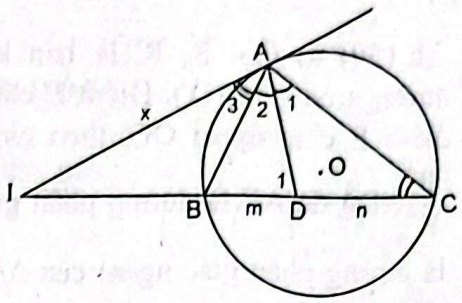
b) Đặt $IA = x$. Ta có $IA^2 = IB \cdot IC$ nên

$x^2 = (x-2)(x+3)$. Tìm được $x = 6$ cm.

c) $IA^2 = IB \cdot IC = (ID - m)(ID + n)$

$\Rightarrow x^2 = (x-m)(x+n) = x^2 + nx - mx - mn$

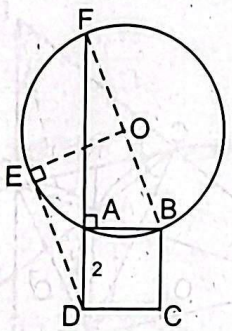
$\Rightarrow mn = nx - mx$. Chia hai vế cho mnx được $\frac{1}{x} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$.



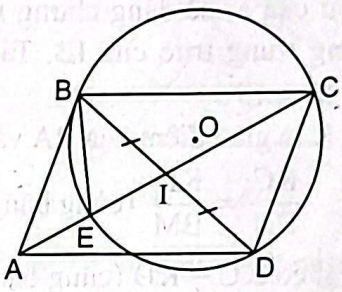
Hình 155

60. (h.156) Kẻ đường kính BOF thì F, A, D thẳng hàng. Gọi DE là tiếp tuyến kẻ từ D. Ta có $DE^2 = DA.DF = 2(2 + AF) \Rightarrow 16 = 2(2 + AF) \Rightarrow AF = 6$.

Đáp số: $OB = \sqrt{10}$ (cm).



Hình 156



Hình 157

61. (h.157) Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành. Ta có

$$IE.IA = IE.IC = IB.ID = IB^2.$$

Ta có $\Delta IBE \backsim \Delta IAB$ (c.g.c) nên $\widehat{IBE} = \widehat{IAB}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

62. (h.158)

a) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{E_1} = \widehat{E_2} = \widehat{M_1}$

nên $\Delta AEF \backsim \Delta BMD$ (g.g).

Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$, $\widehat{AEG} = \widehat{M_2}$

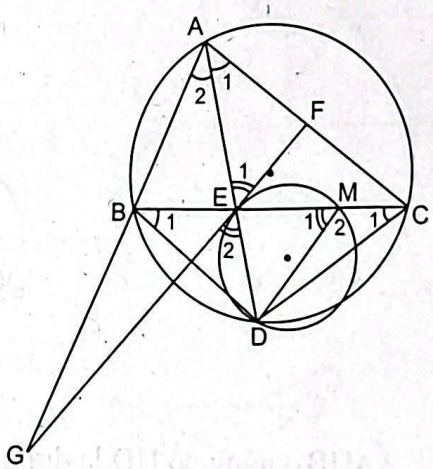
nên $\Delta AEG \backsim \Delta CMD$ (g.g).

b) $\Delta AEF \backsim \Delta BMD$ nên $\frac{EF}{MD} = \frac{AE}{BM}$ (1)

$\Delta CMD \backsim \Delta AEG$ nên $\frac{MD}{EG} = \frac{CM}{AE}$ (2)

Nhân (1) với (2) được $\frac{EF}{EG} = \frac{CM}{BM} = \frac{1}{3}$.

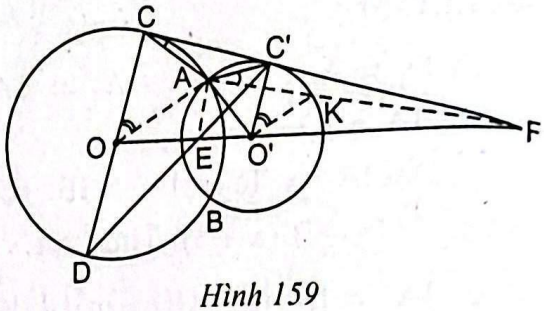
Vậy $EG = 3EF$.



Hình 158

Scanned with CamScanner

63. (h.159) a) Gọi R, R' là bán kính của các đường tròn (O), (O'). Điểm E chia trong OO', điểm F chia ngoài OO' theo cùng một tỉ số $\frac{R}{R'}$. Do đó AE là đường phân giác trong, AF là đường phân giác ngoài của ΔAOO'. Suy ra $\widehat{EAF} = 90^o$.



Hình 159

b) Kẻ bán kính O'K song song và cùng chiều với OA. Gọi F' là giao điểm của AK với OO'. Chứng minh F' chia ngoài OO' theo tỉ số $\frac{R}{R'}$ để suy ra F' ≡ F. Ta có $\widehat{COA} = \widehat{C'O'K}$ nên $\widehat{C'CA} = \widehat{C'AK}$. Từ đó AF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'.

64. (h.160) a) Ta có $\widehat{BCD} = \hat{E} = \widehat{ICD}$. Tương tự $\widehat{BDC} = \widehat{IDC}$.

Do đó ΔICD = ΔBCD (g.c.g).

b) Từ câu a, dễ dàng chứng minh được CD là đường trung trực của IB. Ta lại có CD // EF nên IB ⊥ EF. (1)

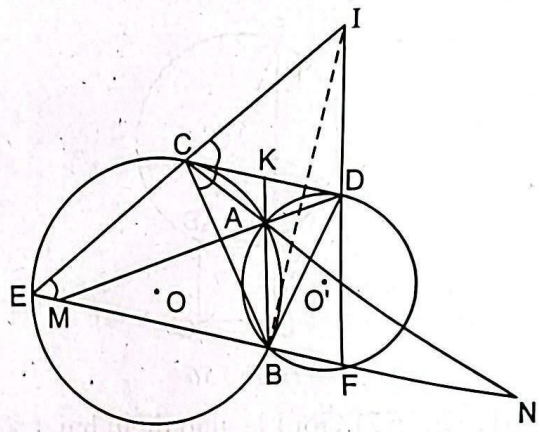
Gọi K là giao điểm của BA và CD. Ta có

$$\frac{KC}{BN} = \frac{KD}{BM} \text{ (cùng bằng } \frac{AK}{AB}\text{)}.$$

Ta lại có KC = KD (cùng bằng $\sqrt{KA.KB}$) nên

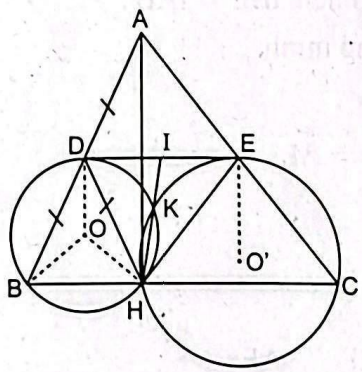
BN = BM. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IB là đường trung trực của MN.



Hình 160

65. (h.161)



Hình 161

ΔAHB vuông có HD là đường trung tuyến nên DB = DH. Ta lại có OB = OH nên OD là đường trung trực của BH, OD ⊥ BH.

Ta lại có DE // BC nên DE ⊥ OD.

Vậy DE là tiếp tuyến của (O), tương tự là tiếp tuyến của (O').

Gọi I là giao điểm của HK và DE. Ta có $ID^2 = IK \cdot IH = IE^2$ nên ID = IE.

Scanned with CamScanner

§3. Cung chứa góc

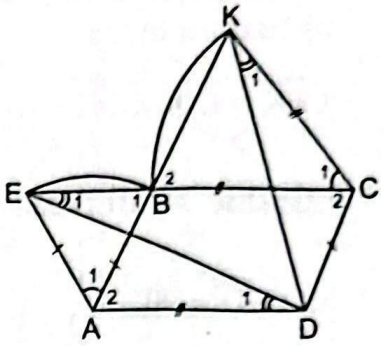
66. (h.162) a) Các tam giác cân ABE, CBK có $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ nên $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$. Ta lại có $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ nên $\overset{\frown}{DAE} = \overset{\frown}{KCD}$.

$\Delta DAE = \Delta KCD$ (c.g.c) nên DE = DK.

b) $\Delta DAE = \Delta KCD$ nên $\hat{D}_1 = \hat{K}_1$, mà $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ nên $\hat{K}_1 = \hat{E}_1$. Suy ra D, E, K, C thuộc cùng một đường tròn.(1)

Mặt khác $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ nên A, E, K, C thuộc cùng một đường tròn.(2)

Từ (1), (2) suy ra năm điểm A, E, K, C, D cùng thuộc đường tròn đi qua E, K, C.



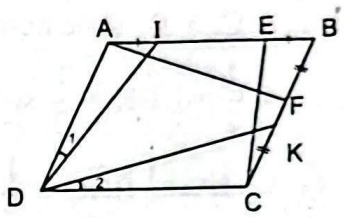
Hình 162

67. (h.163) Ta sẽ chứng minh $\overset{\frown}{BAF} = \overset{\frown}{BCE}$ bằng cách chứng minh $\Delta BAF \backsim \Delta BCE$.

Ta có $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{CD}{AD}$. (1)

Ta lại có $\Delta DCK \backsim \Delta DAI$ (g.g) nên $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{CK}{AI} = \dfrac{BF}{BE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BF}{BE}$.



Hình 163

$\Delta BAF \backsim \Delta BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \overset{\frown}{BAF} = \overset{\frown}{BCE} \Rightarrow$ A, E, F, C thuộc cùng một đường tròn.

68. (h.164) Gọi I là điểm đối xứng với M qua DE. Đường thẳng IM là đường thẳng d.

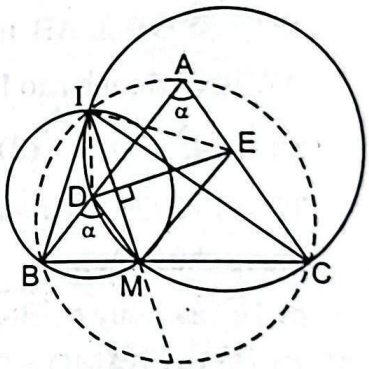
Đặt $\overset{\frown}{BAC} = \alpha$. Ta có BD = DM = DI nên $I \in (D; DB)$,

do đó góc nội tiếp $\overset{\frown}{BIM} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BDM} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Chứng minh tương tự, $\overset{\frown}{MIC} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MEC} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Do đó $\overset{\frown}{BIC} = \alpha$. Ta lại có $\overset{\frown}{BAC} = \alpha$. Suy ra I, A, B, C thuộc cùng một đường tròn.

$\overset{\frown}{BIM} = \overset{\frown}{MIC}$ nên IM đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

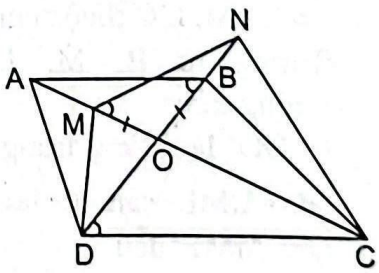


Hình 164

69. (h.165) a) $\Delta OMN = \Delta OBA$ (c.g.c) nên $\overset{\frown}{OMN} = \overset{\frown}{OBA}$.

Ta lại có $\overset{\frown}{OBA} = \overset{\frown}{ODC}$ nên $\overset{\frown}{OMN} = \overset{\frown}{ODC}$. Do đó bốn điểm D, M, N, C thuộc cùng một đường tròn (dựa vào cung chứa góc).

b) Suy ra từ câu a.



Hình 165

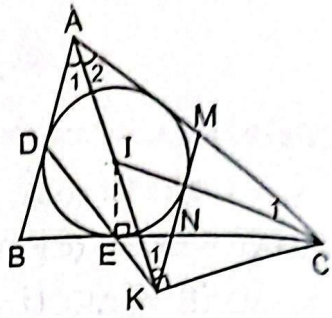
Scanned with CamScanner

70. (h.166) a) MN // AB $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

$\Rightarrow$ KM = AM = MC $\Rightarrow \widehat{AKC} = 90^o$. Ta lại có $\widehat{IEC} = 90^o$.
Suy ra I, E, K, C thuộc đường tròn có đường kính IC.

b) Từ câu a suy ra

$$\widehat{CEK} = \widehat{CIK} = \widehat{A}_2 + \widehat{C}_1 = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90^o - \frac{\widehat{B}}{2}. \quad (1)$$



Hình 166

Mặt khác, ΔBED cân $\Rightarrow \widehat{BED} = 90^o - \frac{\widehat{B}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{CED} = 90^o + \frac{\widehat{B}}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEK} + \widehat{CED} = 180^o$, do đó D, E, K thẳng hàng.

71. (h.167) a) Ta sẽ chứng minh $\widehat{K}_1 = \widehat{I}_1$, dùng $\widehat{O}_1$ làm trung gian.

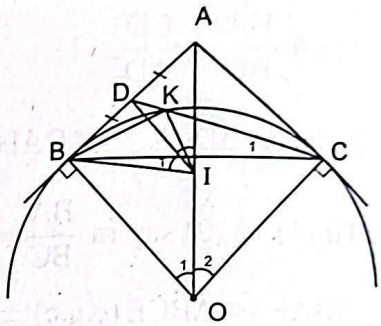
$\widehat{K}_1 = \widehat{C}_1 + \widehat{B}_1$ (góc ngoài ΔBCK)

$= \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{BK} + \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{KC} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{BC}$.

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{BC}$.

Vậy $\widehat{K}_1 = \widehat{O}_1$. (1)

ΔAOB có ID là đường trung bình nên ID // OB suy ra $\widehat{AOD} = \widehat{O}_1$ (đồng vị).



Hình 167

Ta lại có OB $\perp$ AB nên ID $\perp$ AB.

ΔAIB có đường cao ID là đường trung tuyến nên $\widehat{AOD} = \widehat{I}_1$.

Suy ra $\widehat{I}_1 = \widehat{O}_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K}_1 = \widehat{I}_1$, do đó bốn điểm B, I, K, D thuộc cùng một đường tròn (cung chứa góc).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{BKI} = \widehat{BDI} = 90^o$.

72. (h.168) a) $\Delta AMD = \Delta CMD$ (c.g.c)

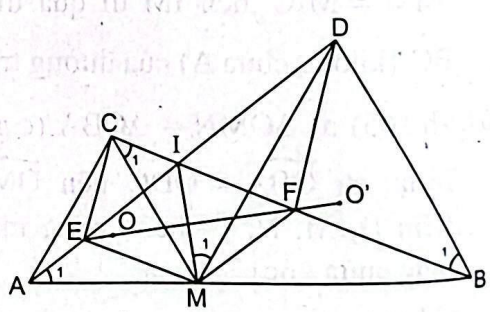
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$

$\Rightarrow$ A, M, I, C thuộc cùng một đường tròn.

Tương tự B, M, I, D thuộc cùng một đường tròn.

b) OO' là đường trung trực của dây chung IM nên ΔIME cân. Ta lại có $\widehat{MIE} = \widehat{MCA} = 60^o$ nên ΔIME đều.

Tương tự ΔIMF đều.



Hình 168

Scanned with CamScanner

MC // BD $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{B_1} = \widehat{M_1}$ (do câu a) nên $\widehat{C_1} = \widehat{M_1}$.

Ta lại có $\widehat{CIM} = \widehat{MID}$ (cùng bằng 120°) nên $\Delta CIM \backsim \Delta MID$ (g.g).

Suy ra $\frac{CI}{MI} = \frac{MI}{ID} \Rightarrow \frac{CI}{IF} = \frac{EI}{ID} \Rightarrow$ CE // DF (định lí Thalès đảo).

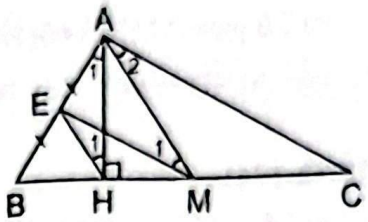
73. (h.169) Gọi E là trung điểm của AB. Ta có

$$\widehat{H_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{M_1}$$

nên bốn điểm A, M, H, E thuộc cùng một đường tròn.

Suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$.

Do EM // AC nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Hình 169

§4. Tứ giác nội tiếp

74. (h.170) a) ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$. Theo giả thiết $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

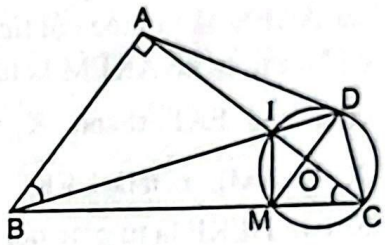
Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{ACB}$.

b) ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Ta lại có $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$ (câu a)

nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACD}$,

do đó DA là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 170

75. (h.171) a) Tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADC}$ bù $\widehat{ABC}$.

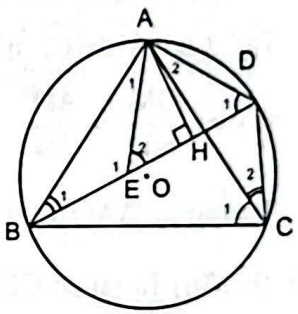
$\widehat{E_1}$ bù $\widehat{E_2}$, $\widehat{E_2} = \widehat{D_1} = \widehat{C_1} = \widehat{ABC}$.

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{E_1}$.

b) ΔAEB và ΔADC có $\widehat{E_1} = \widehat{ADC}$, $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$

nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

$\Delta AEB = \Delta ADC$ (c.g.c) nên BE = CD.



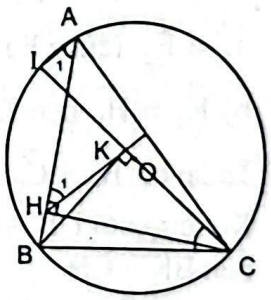
Hình 171

76. (h.172) Vẽ đường kính CI.

Tứ giác BHKC có $\widehat{BHC} = \widehat{BKC} = 90^\circ$ nên nội tiếp, suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{BCI}$.

Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{BCI}$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{A_1}$, suy ra HK // IA.

Do IA $\perp$ AC nên HK $\perp$ AC.



Hình 172

Scanned with CamScanner

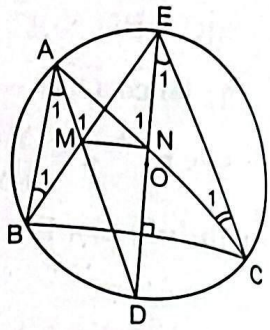
77. (h.173)

a) $\widehat{M_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \widehat{D_1} + \widehat{C_1} = \widehat{N_1}$

nên AMND là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác AMND nội tiếp có $\overset{\frown}{MAD} = 90^o$

nên $\overset{\frown}{MND} = 90^o$. Suy ra MN // BC (cùng vuông góc với DE).



Hình 173

78. (h.174)

a) EF // MN vì cùng vuông góc với AI.

b) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$, $\widehat{F_1} = \widehat{F_2} = \widehat{E_1}$

nên $\Delta ANE \backsim \Delta AME$ (g.g).

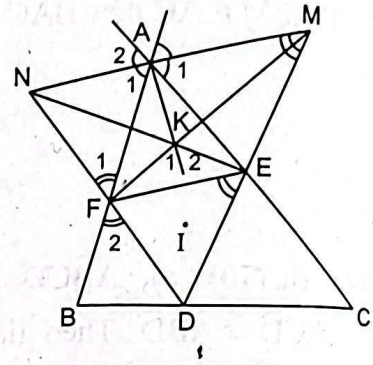
c) $\Delta AFN \backsim \Delta AME \Rightarrow \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AF}{AM}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{ANE} = \overset{\frown}{AFM}$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ AKFN là tứ giác nội tiếp.

d) Tương tự có AKEM là tứ giác nội tiếp. Tia đối của KA chia góc EKF thành $\widehat{K_1}$ và $\widehat{K_2}$. Ta có $\widehat{K_1} = \overset{\frown}{ANF}$, $\widehat{K_2} = \overset{\frown}{AME}$ nên $\widehat{D} + \overset{\frown}{EKF} = \widehat{D} + \widehat{K_1} + \widehat{K_2} = \widehat{D} + \overset{\frown}{ANF} + \overset{\frown}{AME} = 180^o$.

Suy ra DEKF là tứ giác nội tiếp.



Hình 174

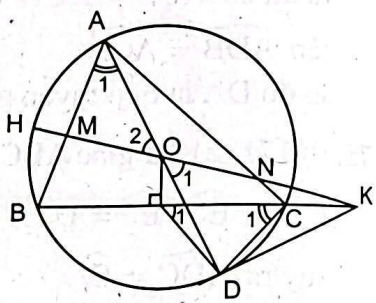
79. (h.175) Kẻ OH $\perp$ BC.

Tứ giác OHDK nội tiếp nên $\widehat{O_1} = \widehat{H_1}$, do đó $\widehat{O_2} = \widehat{H_1}$.

Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ nên $\Delta AOM \backsim \Delta CHD$ (g.g),

suy ra $\dfrac{OM}{HD} = \dfrac{AO}{CH}$. (1)

Tương tự $\Delta AON \backsim \Delta BHD$ nên $\dfrac{ON}{HD} = \dfrac{AO}{BH}$. (2)



Hình 175

80. (h.176) Ta lại có CH = BH nên từ (1) và (2) suy ra

OM = ON.

a) $\widehat{I_1} = \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ nên IH // EC.

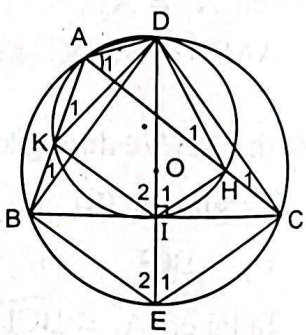
$\widehat{I_2} = \widehat{E_2}$ (cùng bù $\overset{\frown}{BAD}$) nên IK // EB.

b) $\widehat{K_1} = \widehat{H_1}$ nên $\overset{\frown}{DKB} = \overset{\frown}{DHC}$.

Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ nên $\overset{\frown}{BDK} = \overset{\frown}{CDH}$.

Kết hợp với DB = DC ta có $\Delta BDK = \Delta CDH$ (g.c.g)

nên BK = CH.



Hình 176

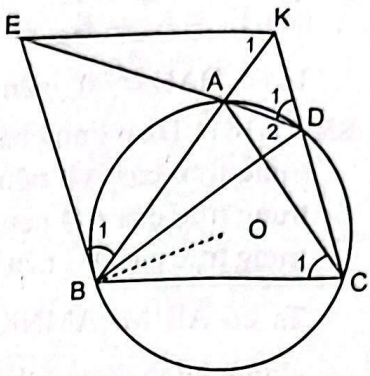
Scanned with CamScanner

81. (h.177) a) $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ nên BDKE là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác BDKE nội tiếp nên $\widehat{K_1} = \widehat{D_2}$.

Ta lại có $\widehat{D_2} = \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ nên $\widehat{K_1} = \widehat{B_1}$.

Suy ra EB = EK.



Hình 177

82. (h.178) a) $\widehat{BAH} = \widehat{H_1}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$) $= \widehat{I_1}$

nên ADIM là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{H_1}$, $\widehat{MDH} = \widehat{MHD}$

nên $\widehat{ODM} = \widehat{OHM} = 90^o$.

Vậy DM là tiếp tuyến của (O).

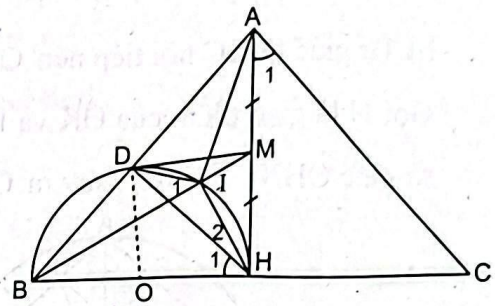
c) $\widehat{A_1} = \widehat{BAH} = \widehat{H_1}$.

$\widehat{A_2} = \widehat{IDM}$ (do câu a) $= \widehat{H_2}$ (do câu b).

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{H_1} + \widehat{H_2}$

$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{IHB} \Rightarrow$ AIHC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIC} = \widehat{AHC} = 90^o$.



Hình 178

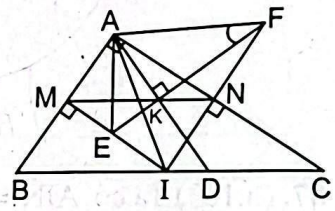
83. (h.179) Gọi M, K, N là trung điểm của AB, AD, AC. Các điểm E, F là giao điểm của IM, IN và đường vuông góc với AD tại K.

$\widehat{AKF} = \widehat{ANF} = 90^o \Rightarrow$ AKNF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AFK} = \widehat{ANK}$.

Ta lại có $\widehat{ANM} = \widehat{AIM}$ (ANIM là hình chữ nhật), tức là $\widehat{ANK} = \widehat{AIE}$. Suy ra $\widehat{AFK} = \widehat{AIE}$ tức là $\widehat{AFE} = \widehat{AIE}$.

Do đó AEIF là tứ giác nội tiếp.



Hình 179

Do $\widehat{EIF} = 90^o$ nên EF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEIF. Do D đối xứng với A qua EF nên D cũng nằm trên đường tròn đó.

84. (h.180)

a) Gọi N là giao điểm của AM và BC.

ΔABN có AD = DB và DK // BN nên AK = KN.

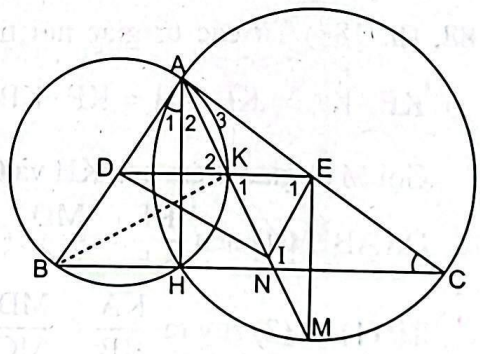
ΔABN có BK là đường trung tuyến và đường cao nên là tam giác cân, suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$.

Ta lại có $\widehat{ANB} = \widehat{C} + \widehat{A_3}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ nên

$\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$.

b) Từ câu a suy ra EM ⊥ BC, mà DE // BC nên DE ⊥ EM.

ΔKEM vuông tại E có EI là đường trung tuyến



Hình 180

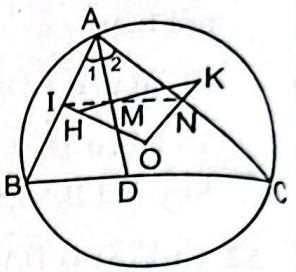
Scanned with CamScanner

nên $\widehat{E_1} = \widehat{K_1} = \widehat{K_2} = \widehat{DAK}$, suy ra ADIE là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{DAE} = 90^o$ nên $\widehat{DIE} = 90^o$.

85. (h.181) Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau: OH là đường trung trực của AB nên đi qua trung điểm I của AB, HK là đường trung trực của AD nên đi qua trung điểm M của AD, OK là đường trung trực của AC nên đi qua trung điểm N của AC.

Ta có AIHM, AMNK là các tứ giác nội tiếp và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên chứng minh được $\widehat{OHK} = \widehat{OKH}$. Do đó OH = OK.

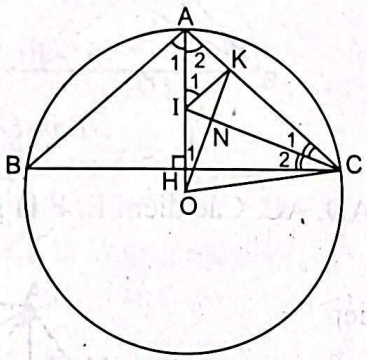


Hình 181

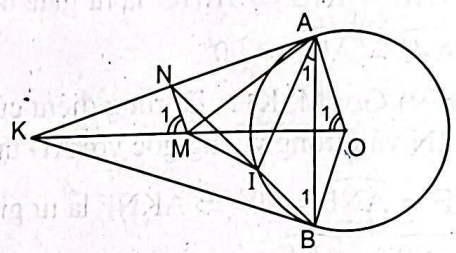
86. (h.182) a) IK // AB $\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{OCA} \Rightarrow$ OIKC là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác OIKC nội tiếp nên $\widehat{O_1} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Gọi N là giao điểm của OK và IC, H là giao điểm của OA và BC. Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{C_2}$ nên tứ giác OHNC nội tiếp, suy ra $\widehat{ONC} = \widehat{OHC} = 90^o$.



Hình 182



Hình 183

87. (h.183) Ta có $\widehat{AIN} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AB} = \widehat{O_1}$.

Ta lại có MN là đường trung bình ΔAKO nên MN // OA, suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{M_1} = \widehat{AMN}$.

Từ đó $\widehat{AIN} = \widehat{AMN}$ nên tứ giác AIMN nội tiếp.

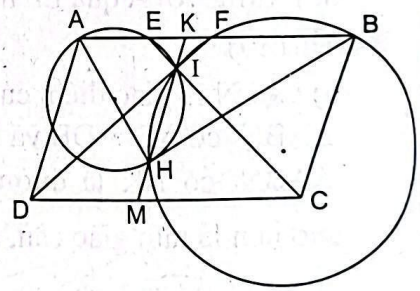
Ta lại có $\widehat{ANM} = 90^o$ nên $\widehat{AIM} = 90^o$.

88. (h. 184) Từ các tứ giác nội tiếp AEIH và BFIH ta có

$KE \cdot KA = KI \cdot KH = KF \cdot KB$ suy ra $\frac{KA}{KB} = \frac{KF}{KE}$. (1)

Gọi M là giao điểm của KH và CD.

Do AB // CD nên $\frac{KF}{KE} = \frac{MD}{MC}$. (2)



Hình 184

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KA}{KB} = \frac{MD}{MC}$, do đó KM // AD, tức là IH // AD.

Scanned with CamScanner

89. (h.185) a) Ta có DI ⊥ BC, HK // BC nên DI ⊥ HK.

Tứ giác DIHE nội tiếp nên $\widehat{H_1} = \widehat{I_1}$.

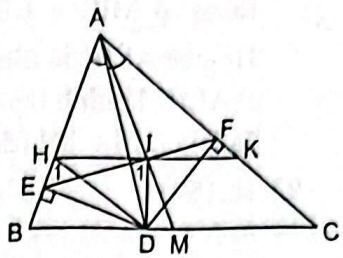
Tứ giác DIFK nội tiếp nên $\widehat{I_1} = \widehat{DKF}$.

Suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{DKF}$. Vậy AHDK là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác AHDK nội tiếp có $\widehat{DAH} = \widehat{DAK}$ nên DH = DK.

ΔDHK cân có DI là đường cao nên IH = IK.

HK // BC nên $\frac{IH}{MB} = \frac{AI}{AM} = \frac{IK}{MC}$. Do IH = IK nên MB = MC.



Hình 185

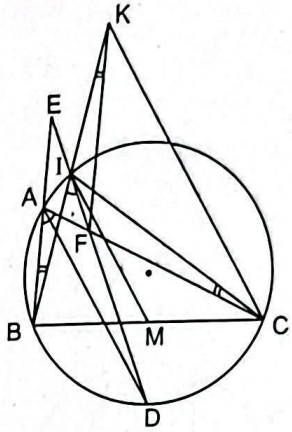
90. (h.186)

a) IM là đường trung bình của ΔBCK ⇒ KC // IM // AD

⇒ $\widehat{ACK} = \widehat{CAD} = \widehat{BAD} = \widehat{I_1}$ ⇒ KIFC là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác KIFC nội tiếp nên $\widehat{K_1} = \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$.

Ta lại có $\widehat{BIE} = \widehat{KIF}$ và BI = IK nên ΔBIE = ΔKIF (c.g.c), suy ra IE = IF.



Hình 186

91. (h.187) a) Ta có $\widehat{H_1} = \widehat{B_1} + \widehat{M_1} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$

nên AEHD là tứ giác nội tiếp.

b) ΔMEB ∽ ΔMBH (g.g) nên $\frac{MB}{MH} = \frac{ME}{MB}$.

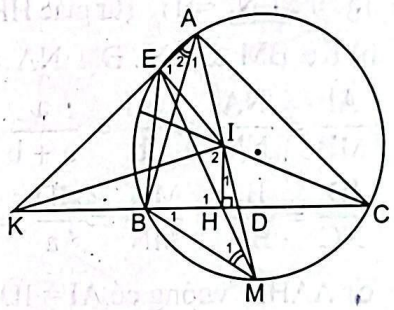
Dễ chứng minh MB = MI nên $\frac{MI}{MH} = \frac{ME}{MI}$.

Từ đó ΔMIH ∽ ΔMEI (c.g.c) suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{E_2}$.

Do AEHD là tứ giác nội tiếp

nên $\widehat{D_1} + \widehat{E_2} + \widehat{E_1} = 180°$.

Ta lại có $\widehat{D_1} + \widehat{E_2} = \widehat{D_1} + \widehat{I_1} = 90°$ nên $\widehat{E_1} = 90°$.



Hình 187

c) Tứ giác KEIH có $\widehat{KEI} = 90°$ và $\widehat{KHI} = 90°$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{I_2} = \widehat{KEH}$, $\widehat{KID} = \widehat{I_2} + \widehat{I_1} = \widehat{KEH} + \widehat{E_2} = \widehat{KEI} = 90°$.

92. (h.188) a) AE // HK (cùng vuông góc với ME) nên $\widehat{H_1} = \widehat{E_1}$, mà $\widehat{E_1} = \widehat{C}$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{C}$ (1)

Suy ra BHKC là tứ giác nội tiếp.

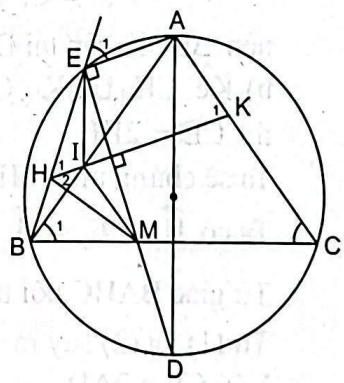
Ta lại có $\widehat{H_2} = \widehat{H_1}$ (đối xứng) nên $\widehat{H_2} = \widehat{C} = \widehat{B_1}$.

Suy ra BHIM là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác BHIM nội tiếp nên $\widehat{H_1} = \widehat{IMB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{C} = \widehat{IMB}$ nên MI // AC,

do đó $\widehat{K_1} = \widehat{MIK}$ (so le trong).



Hình 188

Scanned with CamScanner

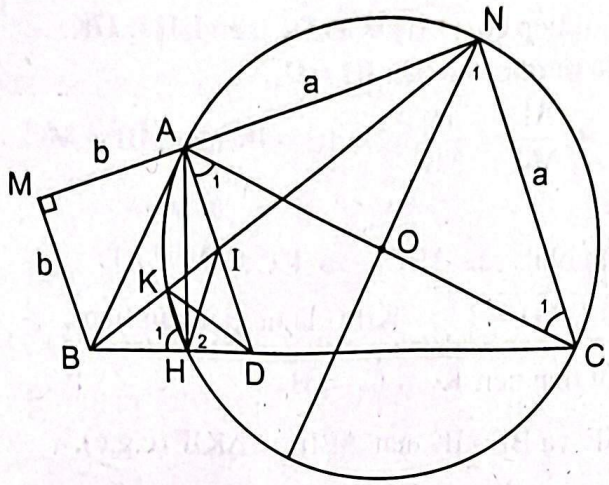
Ta lại có $\widehat{MIK} = \widehat{EIK}$ (đối xứng) nên $\widehat{K_1} = \widehat{EIK}$.

Tứ giác AEIK là hình thang cân.

c) AEIK là hình thang cân nên EI = AK.

Ta lại có EI = MI (đối xứng) nên MI = AK.

93. (h.189)



Hình 189

a) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 45^\circ$ nên AD // NC. Suy ra $\widehat{KID} = \widehat{N_1}$.

Ta lại có $\widehat{N_1} = \widehat{H_1}$ (tứ giác HKNC nội tiếp) nên $\widehat{KID} = \widehat{H_1}$. Vậy DIKH là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ BM ⊥ AN. Đặt NA = NC = a, MA = MB = b. Do AD // NC // MB nên

$$\frac{AI}{MB} = \frac{NA}{NM} \Rightarrow \frac{AI}{b} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow AI = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\frac{ID}{NC} = \frac{BI}{BN} = \frac{MA}{MN} \Rightarrow \frac{ID}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow ID = \frac{ab}{a+b}.$$

c) ΔAHD vuông có AI = ID nên IH = ID, $\widehat{IDH} = \widehat{H_2}$.

Do DIKH là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IKD} = \widehat{H_2}$. Suy ra $\widehat{IDH} = \widehat{IKD}$.

94. (h.190) a) $\widehat{E_1} = \widehat{B_2} + \widehat{C_2}$ (góc ngoài ΔEBC)

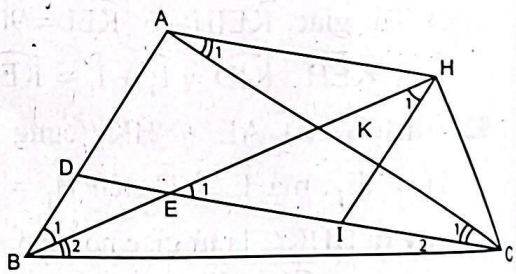
$= \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{ACB} = \widehat{B_1}$

nên ΔBDE cân tại D.

b) Kẻ CH ⊥ BK. Gọi I là trung điểm của EC thì CE = 2IH.

Ta sẽ chứng minh IH = AD.

Ta có $\widehat{H_1} = \widehat{E_1} = \widehat{B_1}$ nên HI // AB. (1)



Hình 190

Tứ giác BAHC nội tiếp nên $\widehat{A_1} = \widehat{B_2} = \widehat{C_1}$, suy ra AH // CD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AHID là hình bình hành nên IH = AD.

Vậy CE = 2AD.

Scanned with CamScanner

95. (h.191)

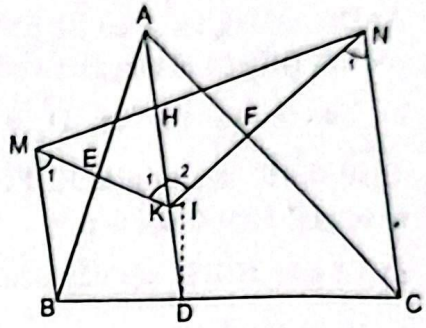
a) $\dfrac{BM}{AK} = \dfrac{BE}{AE}, \dfrac{AK}{CN} = \dfrac{AF}{CF}$

nên $\dfrac{BM}{AK} \cdot \dfrac{AK}{CN} = \dfrac{BE}{AE} \cdot \dfrac{AF}{CF}$.

$\Rightarrow \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BE}{CF}$.

b) Dễ chứng minh.

c) Gọi H là giao điểm của MN và AD.



Hình 191

Từ câu b và AE = AF suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$ nên $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{HM}{HN} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{CF}$.

Ta lại có $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BM}{CN}$ (câu a) nên $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{BM}{CN}$.

Kết hợp với $\widehat{M_1} = \widehat{K_1} = \widehat{K_2} = \widehat{N_1}$ suy ra $\Delta KMB \backsim \Delta KNC$ (c.g.c)

d) Từ câu c suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{CKN}$.

Ta lại có $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$.

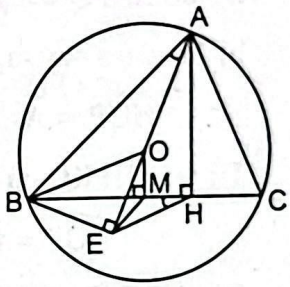
96. (h.192) AHEB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BAE}$.

OMEB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BOE} \Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{AOB}$.

Suy ra $\Delta HME \backsim \Delta AOB$ (g.g). Do ΔAOB cân nên ΔHME cân.

Chú ý: Bỏ điều kiện "các góc nhọn, AB > AC", bài toán vẫn đúng.



Hình 192

97. (h.193) a) $BD^2 = BA^2 = BH \cdot BC$ nên

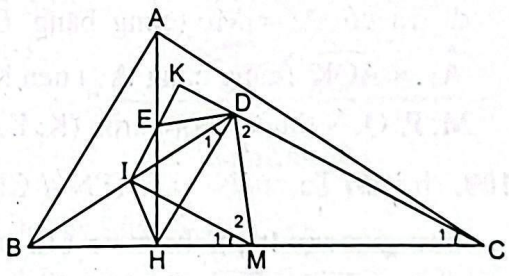
$$\frac{BD}{BH} = \frac{BC}{BD}.$$

Từ đó $\Delta BDH \backsim \Delta BCD$ (c.g.c)

suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$.

Ta lại có IM // CD nên $\widehat{C_1} = \widehat{M_1}$.

Do đó $\widehat{D_1} = \widehat{M_1}$ nên tứ giác HIDM nội tiếp.



Hình 193

b) Tứ giác HEDM nội tiếp. Kết hợp với câu a suy ra tứ giác IEDM nội tiếp.

Gọi K là giao điểm của IE và CD.

Ta có $\widehat{KED} = \widehat{M_2}$ (tứ giác IEDM nội tiếp) $= \widehat{D_2}$ (IM // CD)

Do đó $\widehat{KED} + \widehat{KDE} = \widehat{D_2} + \widehat{KDE} = 90^\circ$. Vậy IE $\perp$ CD.

98. (h.195) a) Gọi I là giao điểm của BP và CQ thì AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{B} = \widehat{HAC}$ nên $\widehat{B_2} = \widehat{A_1}$, từ đó BP $\perp$ AQ. Tương tự CQ $\perp$ AP.

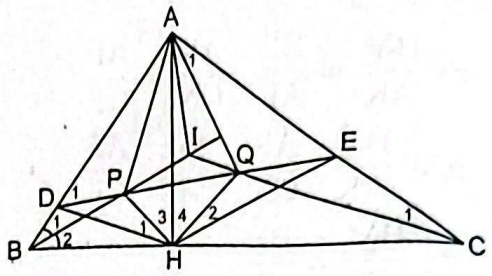
Do đó AI $\perp$ PQ.

Scanned with CamScanner

ΔADE vuông tại A có tia phân giác AI vuông góc với DE nên là tam giác vuông cân.

b) Từ câu a. suy ra $\widehat{D_1} = 45^\circ$. Ta lại có $\widehat{BHP} = 45^\circ$ nên tứ giác BDPH nội tiếp. Tương tự tứ giác HQEC nội tiếp.

c) Tứ giác BDPH nội tiếp nên $\widehat{H_1} = \widehat{P_1}$. Tương tự $\widehat{H_2} = \widehat{C_1}$.



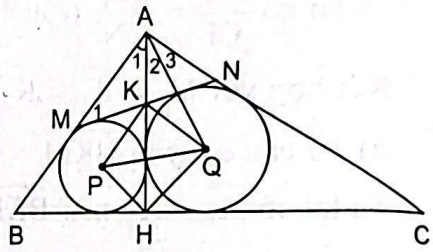
Hình 194

Suy ra $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 45^\circ$.

Ta lại có $\widehat{H_3} = \widehat{H_4} = 45^\circ$ nên $\widehat{DHE} = 135^\circ$.

99. (h.196) a) P và Q là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác đồng dạng AHB và CHA nên $\dfrac{HP}{HQ} = \dfrac{AB}{AC}$.

Do đó $\Delta HPQ \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).



Hình 195

b) Từ câu a suy ra $\widehat{HQP} = \hat{C}$, mà $\hat{C} = \widehat{A_1}$ nên

$$\widehat{HQP} = \widehat{A_1}. \qquad (1)$$

Tứ giác HPKQ có $\widehat{PHQ} = \widehat{PKQ} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra

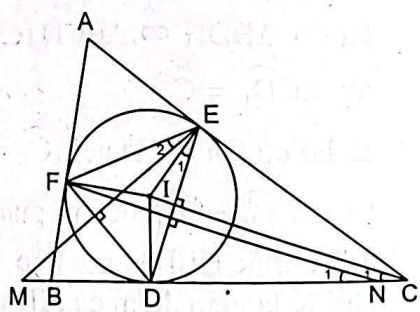
$$\widehat{HQP} = \widehat{HKP}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{HKP}$, do đó KP // AB. Chứng minh tương tự, KQ // AC.

c) Ta đã có $\hat{C} = \widehat{HKP} = \widehat{MKP}$. Hãy chứng minh $\widehat{MKP} = \widehat{M_1}$ (sử dụng kết quả ở câu b).

d) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cùng bằng $\hat{C}$) nên KM = KA. Tương tự KN = KA. Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{AQK}$ (cùng bằng $\widehat{A_3}$) nên KQ = KA. Tương tự KP = KA. Do đó năm điểm A, M, P, Q, N thuộc đường tròn (K; KA).

100. (h.196) Ta có $\widehat{N_1} = \widehat{C_1}$ (FN // CI), $\widehat{C_1} = \widehat{E_1}$ (DIEC là tứ giác nội tiếp), $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ ($\widehat{E_1}$ phụ $\widehat{DEC}$, $\widehat{E_2}$ phụ $\widehat{DFE}$, $\widehat{DEC} = \widehat{DFE}$). Suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{E_2}$. Vậy E, F, M, N thuộc cùng một đường tròn.



Hình 196

101. (h.197)

a) Xét ΔDEF, trong hai góc E và F tồn tại một góc nhọn, giả sử là $\hat{E}$.

Ta có $S' = \dfrac{1}{2} EF \cdot ED \sin E$. (1)

EF là cạnh của ΔAEF nội tiếp đường tròn đường kính IA nên $EF = IA \sin A$ (2)

Tương tự $ED = IC \sin C$ (3)

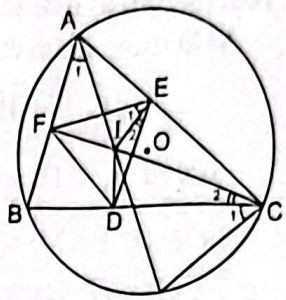
Scanned with CamScanner

Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ và $\widehat{E_2} = \widehat{C_2}$ nên

$\hat{E} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{ICK}$. Xét ΔICK ta có

$$\frac{IK}{\sin ICK} = \frac{IC}{\sin K} \Rightarrow \frac{IK}{\sin E} = \frac{IC}{\sin B} \Rightarrow \sin E = \frac{IK \sin B}{IC} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $S' = \frac{1}{2} IA \cdot IK \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.



Hình 197

b) Ta có $IA \cdot IK = R^2 - OI^2$ (xem Ví dụ 8c).

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ và } S = \frac{abc}{4R} \text{ (Ví dụ 6b)}$$

nên $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R} \cdot \frac{1}{2R^2} = \frac{S}{2R^2}$.

Do đó $S' = \frac{R^2 - OI^2}{2} \cdot \frac{S}{2R^2} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{R^2 - OI^2}{4R^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{OI}{2R}\right)^2$.

Nhận xét.

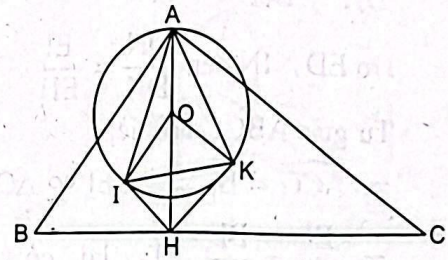
Từ bài toán trên suy ra: Diện tích tam giác DEF lớn nhất bằng $\frac{S}{4}$ khi I trùng O.

Công thức $\frac{S'}{S} = \frac{R^2 - OI^2}{4R^2}$ còn gọi là *công thức Pedal.*

102. (h.198) Ta có $\widehat{IHA} = 45^\circ$. (1)

Do $\widehat{IAK} = 45^\circ$ nên $\widehat{IOK} = 90^\circ$. Ta lại có $\widehat{IHK} = 90^\circ$ nên tứ giác OIHK nội tiếp, suy ra $\widehat{IHO} = \widehat{IKO}$. Do $\widehat{IKO} = 45^\circ$ nên $\widehat{IHO} = 45^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra H, O, A thẳng hàng.



Hình 198

103. (h.199) a) A, M, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

b) Gọi BE là đường cao của ΔABC. Theo hệ thức lượng trong đường tròn (O) ta có $AN^2 = AE.AC$.

Do DHEC là tứ giác nội tiếp nên $AE.AC = AH.AD$.

Suy ra $AN^2 = AH.AD$, do đó $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AN}$.

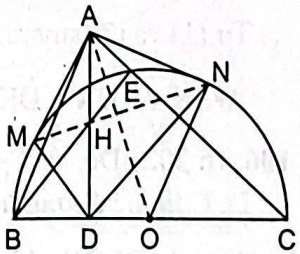
Từ đó $\Delta AHN \backsim \Delta AND$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{AND}$.

Chứng minh tương tự $\widehat{AHM} = \widehat{AMD}$. Suy ra

$$\widehat{AHN} + \widehat{AHM} = \widehat{AND} + \widehat{AMD} = 180^\circ$$

(do AMDN là tứ giác nội tiếp).

Vậy M, H, N thẳng hàng.



Hình 199

Scanned with CamScanner

104. (h.200) a) Các tam giác vuông EBC, DBC có M là trung điểm của cạnh huyền nên

$$\widehat{E_1} = \overset{\frown}{ABC},\ \widehat{D_1} = \overset{\frown}{ACB}.$$

Suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{D_1} = \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ACB} = 180^\circ - \widehat{A}$.

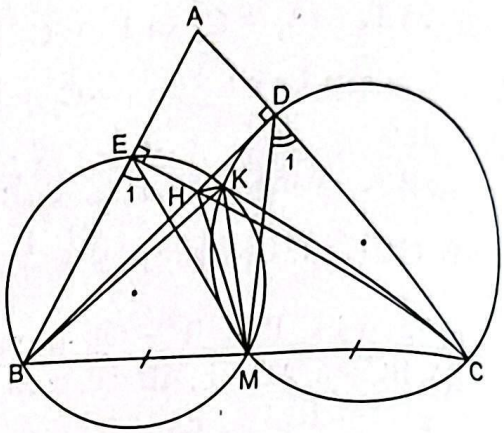
Ta lại có $\overset{\frown}{BKM} = \widehat{E_1}$ (tứ giác BEKM nội tiếp)

$\overset{\frown}{CKM} = \widehat{D_1}$ (tứ giác CDKM nội tiếp) nên

$\overset{\frown}{BKC} = \overset{\frown}{BKM} + \overset{\frown}{CKM} = \widehat{E_1} + \widehat{D_1} = 180^\circ - \widehat{A}$ (1)

Dễ chứng minh $\overset{\frown}{BHC} = 180^\circ - \widehat{A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{BKC} = \overset{\frown}{BHC}$. Vậy B, H, K, C thuộc cùng một đường tròn.



Hình 200

b) Từ câu a suy ra $\overset{\frown}{HKC} = 180^\circ - \overset{\frown}{HBC} = 180^\circ - \left(90^\circ - \overset{\frown}{ACB}\right) = 90^\circ + \overset{\frown}{ACB}$ (3)

$\overset{\frown}{MKC} = \widehat{D_1} = \overset{\frown}{ACB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\overset{\frown}{HKM} = \overset{\frown}{HKC} - \overset{\frown}{MKC} = 90^\circ$.

105. (h.201) Qua I kẻ đường thẳng song song với MD, cắt KD ở N.

Ta sẽ chứng minh DN = DK.

Gọi H là giao điểm của BD và CE, ta sẽ chứng minh $\dfrac{DN}{DH} = \dfrac{DK}{DH}$.

Do ED // IN nên $\dfrac{DN}{DH} = \dfrac{EI}{EH}$ (1)

Tứ giác ABGC nội tiếp

$\Rightarrow \overset{\frown}{ACG} = \widehat{B_1} \Rightarrow \Delta BEI \backsim \Delta CDK$ (g.g)

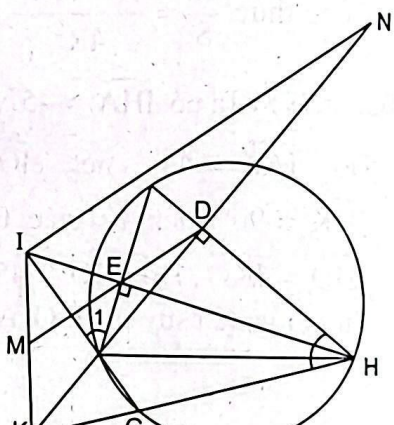
$\Rightarrow \dfrac{EI}{DK} = \dfrac{BE}{CD}$. Ta lại có $\Delta BEH \backsim \Delta CDH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{EH}{DH}$.

Do đó $\dfrac{EI}{DK} = \dfrac{EH}{DH} \Rightarrow \dfrac{EI}{EH} = \dfrac{DK}{DH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{DN}{DH} = \dfrac{DK}{DH}$. Do đó DN = DK.

ΔKIN có DN = DK và DM // MI nên MI = MK.

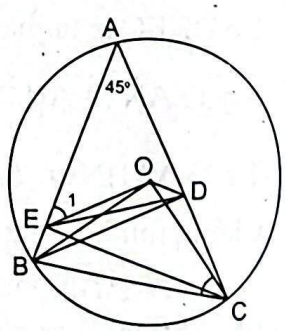


Hình 201

106. (h.202) Do $\widehat{A} = 45^\circ$ nên $\overset{\frown}{BOC} = 90^\circ$. Các điểm B, E, O, D, C thuộc đường tròn đường kính BC.

Tứ giác BEOC nội tiếp có $\overset{\frown}{OCB} = 45^\circ$ nên $\widehat{E_1} = 45^\circ$.

Ta lại có $\overset{\frown}{ABD} = 45^\circ$ nên EO // BD.



Hình 202

Scanned with CamScanner

BEOD là hình thang và là tứ giác nội tiếp nên là hình thang cân.

Suy ra DE = BO = R.

107. (h.203) a) Tứ giác BFEC nội tiếp

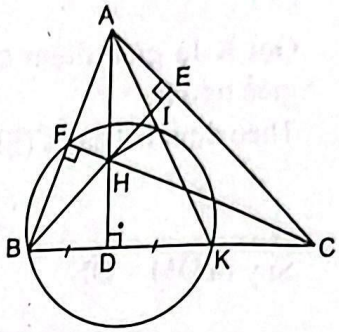
nên $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ mà $AF \cdot AB = AI \cdot AK$

nên $AE \cdot AC = AI \cdot AK$.

Vậy E, I, K, C thuộc cùng một đường tròn.

b) $AI \cdot AK = AF \cdot AB = AH \cdot AD$ nên HIKD là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có $\widehat{HDK} = 90^\circ$ nên $\widehat{HIK} = 90^\circ$.



Hình 203

108. (h.204) Ta chứng minh được B, C là tâm của các đường tròn bàng tiếp của ΔDEF. Theo tính chất của tiếp tuyến kẻ đến các đường tròn:

2EI = chu vi DEF, (1)

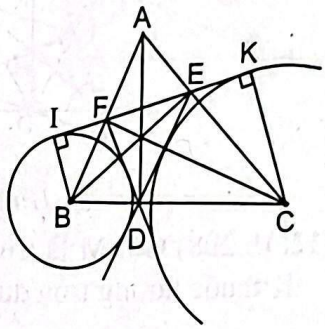
2FK = chu vi DEF (2)

Từ (1), (2) suy ra

chu vi DEF = EI + FK

$\Rightarrow$ DE + DF + EF = (IF + EF) + FK

$\Rightarrow$ DE + DF = IK.



Hình 204

109. (h.205) Ta sẽ chứng minh $\frac{DM}{DE} = \frac{1}{2}$. Gọi N là giao điểm của CE và đường tròn (O),

ta có $\frac{HE}{HN} = \frac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh $\frac{DM}{DE} = \frac{HE}{HN}$.

Ta có $\widehat{CDM} = \widehat{IHE}$ (cùng bù $\widehat{ABC}$) và $\widehat{C_1} = \widehat{I_1}$ nên

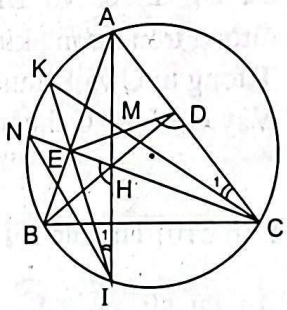
ΔCDM $\backsim$ ΔIHE (g.g), suy ra $\frac{DM}{HE} = \frac{DC}{HI}$ (1)

Ta lại có $\widehat{ACN} = \widehat{AIN}$ nên ΔCDE $\backsim$ ΔIHN (g.g) suy ra

$\frac{DE}{HN} = \frac{DC}{HI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DM}{HE} = \frac{DE}{HN}$. Do đó $\frac{DM}{DE} = \frac{HE}{HN} = \frac{1}{2}$.

Vậy M là trung điểm của DE.



Hình 205

110. (h.206) a) ABCI, ABDE là tứ giác nội tiếp nên

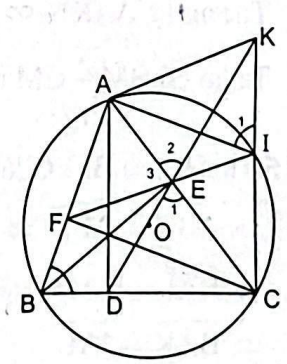
$\widehat{I_1} = \widehat{ABC} = \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$. Do đó tứ giác AEIK nội tiếp.

b) Tứ giác AEIK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{E_3}$.

Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{E_3}$. Suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{ABC}$.

Ta lại có $\widehat{ABC} = \widehat{I_1}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{AKI} = \widehat{I_1}$.

Vậy AI = AK.



Hình 206

Scanned with CamScanner

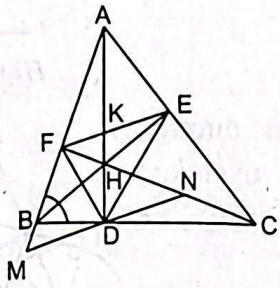
111. (h.207) Gọi H là giao điểm AD, BE, CF. Dễ chứng minh FH là tia phân giác của góc DFE.

Gọi K là giao điểm của AD và EF. ΔDFE có FH là phân giác trong, FA là phân giác ngoài.

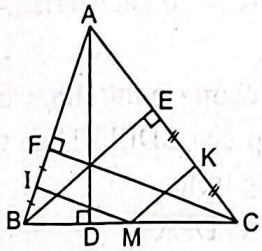
Theo định lí Thalès (FE // MN) và tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{FK}{DN} = \frac{HK}{HD} = \frac{AK}{AD} = \frac{FK}{DM}.$$

Suy ra DM = DN.



Hình 207



Hình 208

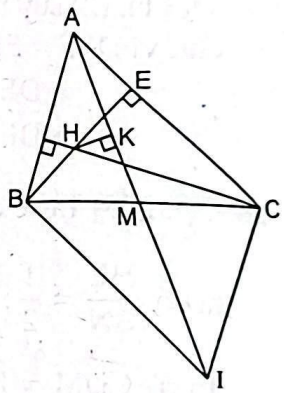
112. (h.208) Gọi M là trung điểm của BC. Hãy chứng minh A, I, D, K thuộc đường tròn đường kính AM.

113. (h.209) Vẽ I đối xứng với A qua M thì ABIC là hình bình hành nên BI // AC và CI // AB.

Từ BH ⊥ AC và BI // AC suy ra BH ⊥ BI. Ta có B và K thuộc đường tròn đường kính HI.

Tương tự C và K thuộc đường tròn đường kính HI.

Vậy B, H, K, C thuộc đường tròn đường kính HI.



Hình 209

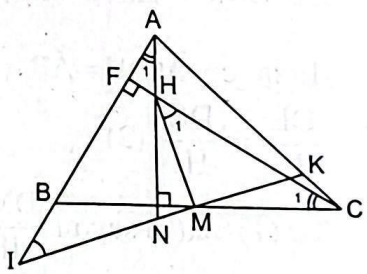
114. (h.210) Tứ giác IFHM nội tiếp nên $\hat{I} = \widehat{H_1}$.

Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ nên $\Delta AIN \backsim \Delta CHM$ (g.g), suy ra

$$\frac{AN}{NI} = \frac{CM}{MH}. \quad (1)$$

Tương tự $\Delta AKN \backsim \Delta BHM$ nên $\frac{AN}{NK} = \frac{BM}{MH}$. (2)

Ta lại có BM = CM nên từ (1) và (2) suy ra NI = NK.



Hình 210

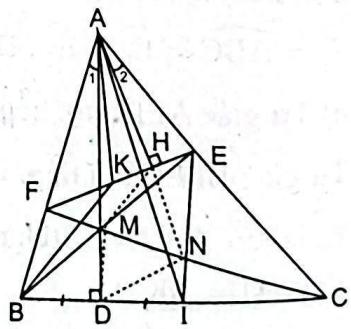
115. (h.211) a) BFEC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (phụ với hai góc trên)

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{KAD}$ (gấp đôi hai góc trên).

$\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{IAE}$.

$\Delta BAK = \Delta IAE$ (c.g.c) nên BK = IE.



Hình 211

Scanned with CamScanner

b) MH là đường trung bình của ΔEBK nên $MH = \frac{BK}{2}$.

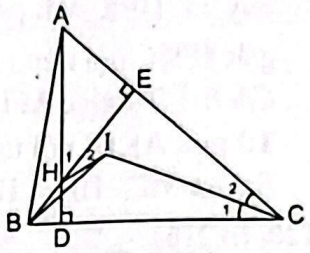
MD là đường trung bình của ΔBIE nên $MD = \frac{IE}{2}$.

Ta lại có BK = IE nên MH = MD.

Tương tự NH = ND.

Lưu ý. Từ câu b suy ra $MN \perp DH$.

116. (h.212) Kẻ các đường cao AD và BE.



Hình 212

Tứ giác DHEC nội tiếp nên $\widehat{H_1} = \widehat{C} = 40^\circ$. (1)

ΔIBC có $\widehat{IBC} = 80^\circ : 2 = 40^\circ$, $\widehat{C_1} = 40^\circ : 2 = 20^\circ$ nên

$\widehat{BIC} = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ$.

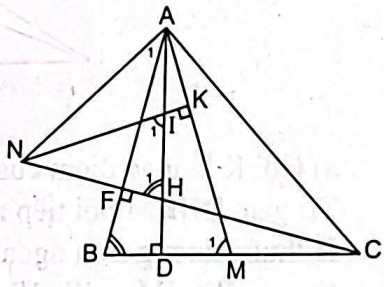
ΔHBC có $\widehat{HBC} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, tương tự

$\widehat{HCB} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$ nên $\widehat{BHC} = 180^\circ - 50^\circ - 10^\circ = 120^\circ$.

Suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$ nên tứ giác BHIC nội tiếp. Do đó $\widehat{H_2} = \widehat{C_1} = 20^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Vậy $\widehat{AHI} = 60^\circ$.

117. (h.213) a) Gọi AD, CF là các đường cao của ΔABC. Từ các tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{H_1} = \widehat{B}$, $\widehat{I_1} = \widehat{M}$.



Hình 213

Suy ra $\Delta NHI \backsim \Delta ABM$ (g.g).

b) Từ câu a suy ra $\frac{NH}{AB} = \frac{HI}{BM} = \frac{HA}{BC}$

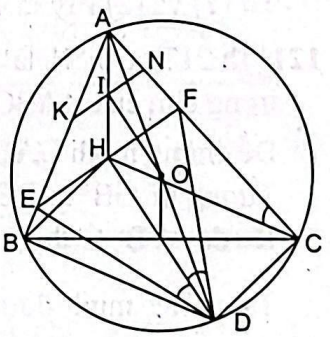
nên $\Delta NHA \backsim \Delta ABC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ANH} = \widehat{BAC}$.

Do đó $\widehat{BAC} + \widehat{A_1} = \widehat{ANH} + \widehat{A_1} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{NAC} = 90^\circ$.

Lưu ý. Cách chứng minh $\Delta NHA \backsim \Delta ABC$ xuất phát từ nhận xét sau: Đường trung tuyến của một tam giác chia tam giác đó thành hai phần, nếu một phần của tam giác này đồng dạng với một phần của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

118. (h.214) Kẻ đường kính AD. Ta có BHCD là hình bình hành nên H, M, D thẳng hàng. OI là đường trung bình của ΔAHD nên OI // DH, suy ra $DH \perp KN$.



Hình 214

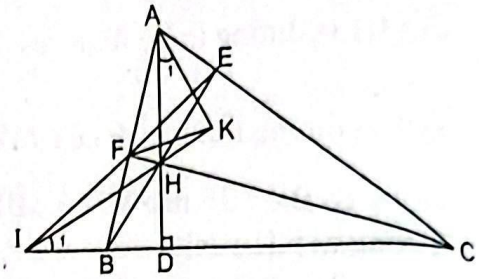
Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH, cắt AB và AC ở E và F, ta có KN // EF. Ta sẽ chứng minh HE = HF.

Tứ giác DBEH nội tiếp nên $\widehat{EBH} = \widehat{EDH}$. Chứng minh tương tự $\widehat{FCH} = \widehat{FDH}$. Ta lại có $\widehat{EBH} = \widehat{FCH}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$) nên $\widehat{EDH} = \widehat{FDH}$, do đó ΔDEF cân và HE = HF.

Từ đó, do KN // EF ta chứng minh được IK = IN.

Scanned with CamScanner

119. (h.215) Gọi D là giao điểm của AH và BC.



Hình 215

Cách 1. $\widehat{AKI} = \widehat{ADI} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ AKDI là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{A_1}$.

AFHK là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HFK} = \widehat{A_1}$.

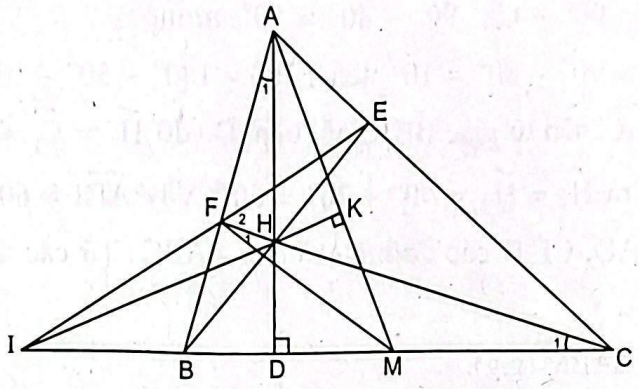
Suy ra $\widehat{HFK} = \widehat{I_1}$, tức là $\widehat{CFK} = \widehat{I_1}$. Do đó tứ giác IFKC nội tiếp.

Cách 2. Tứ giác AFDC nội tiếp nên $HA \cdot HD = HC \cdot HF$.

Tứ giác AKDI nội tiếp nên $HA \cdot HD = HI \cdot HK$.

Suy ra $HC \cdot HF = HI \cdot IK$. Do đó tứ giác IFKC nội tiếp.

120. (h.216)



Hình 216

a) Gọi K là giao điểm của IH và AM.

Tứ giác DHKM nội tiếp nên $ID \cdot IM = IH \cdot IK$.

K thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF nên $IH \cdot IK = IF \cdot IE$.

Suy ra $ID \cdot IM = IF \cdot IE$.

Do đó tứ giác DMEF nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} = \widehat{MFE} = \widehat{MDE} = \widehat{BAC}$ (1)

$\widehat{C_1} + \widehat{F_2} = \widehat{A_1} + \widehat{F_2} = \widehat{A_1} + \widehat{HAE} = \widehat{BAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$. Từ đó $\widehat{MFB} = \widehat{MBF}$. Suy ra $MC = MF = MB$.

121. (h.217) Gọi H là trực tâm của ΔABC, G là trọng tâm của ΔABC.

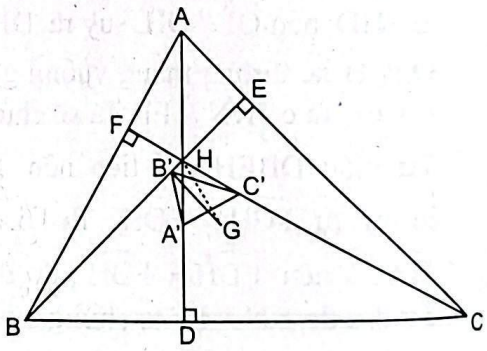
Dễ chứng minh GA' // BC nên GA' $\perp$ AD.

Tương tự GB' $\perp$ BE, GC' $\perp$ CF.

Do đó A', B', C' thuộc đường tròn đường kính HG.

Ta chứng minh được $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ (cùng bù với $\widehat{BHC}$). Tương tự $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (g.g).



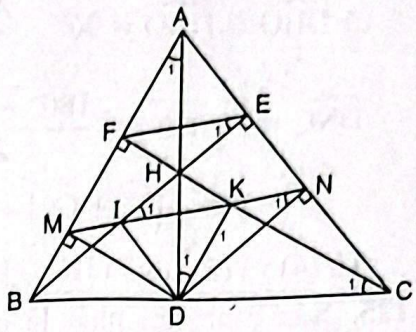
Hình 217

Scanned with CamScanner

122. (h.218)

a) Ta có $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$) và $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (AMDN nội tiếp) nên $\widehat{C_1} = \widehat{N_1}$. Suy ra tứ giác DKNC nội tiếp. Do đó $\widehat{DKC} = \widehat{DNC} = 90^\circ$. Vậy $DK \perp CF$. Tương tự $DI \perp BE$.

b) Gọi $\widehat{H}$ là giao điểm của AD, BE, CF. Từ câu a suy ra tứ giác DIHK nội tiếp và AB // DF (cùng vuông góc với CF). Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1} = \widehat{D_1} = \widehat{I_1}$ nên EF // MN.



Hình 218

123. (h.219)

a) $\widehat{DIB} = \widehat{DCB} = \widehat{D_1}$.

b) Ta sẽ chứng minh $\widehat{F_1} = \widehat{I_1}$.

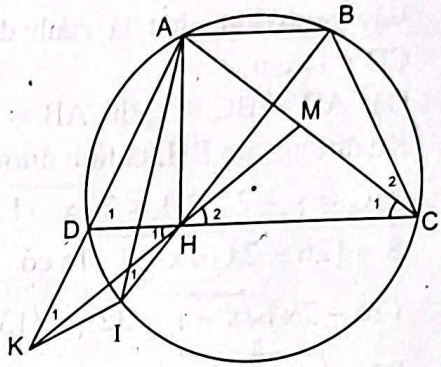
Ta có $\widehat{F_1} = \widehat{D_1} - \widehat{H_1}$

mà $\widehat{D_1} = \widehat{DCB}$

và $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = \widehat{C_1}$

nên $\widehat{F_1} = \widehat{DCB} - \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{I_1}$.

Vậy AHIK là tứ giác nội tiếp.



Hình 219

c) $\widehat{DIK} = \widehat{KIH} - \widehat{DIH}$ mà $\widehat{KIH} = 180^\circ - \widehat{DAH}$ (tứ giác AHIK nội tiếp)

và $\widehat{DIH} = \widehat{DIB} = \widehat{D_1}$ (câu a)

nên $\widehat{DIK} = 180^\circ - \widehat{DAH} - \widehat{D_1} = 180^\circ - \left(\widehat{DAH} + \widehat{D_1}\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Lưu ý. Các câu a và b là gợi ý để giải câu c.

124. (h.220)

a) $\widehat{BDC} = \widehat{BDN} + \widehat{NDC} = \dfrac{\widehat{BIN}}{2} + \dfrac{\widehat{NKC}}{2}$

$= \left(90^\circ - \widehat{ABC}\right) + \left(90^\circ - \widehat{ACB}\right) = \widehat{BAC}$.

Vậy D thuộc đường tròn (O).

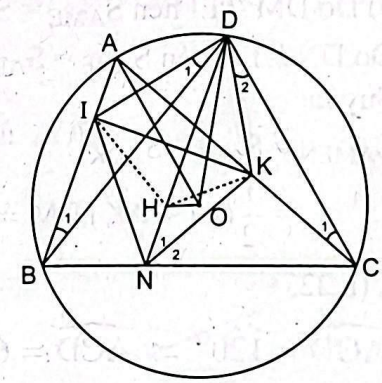
b) $\widehat{D_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{IDK} = \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$

nên A, D, I, K thuộc cùng một đường tròn. (1)

H là trực tâm của ΔINK nên $\widehat{IHK}$ bù $\widehat{INK}$,

suy ra $\widehat{IHK}$ bù $\widehat{IDK}$.

Vậy IHKD là tứ giác nội tiếp. (2)



Hình 220

$\widehat{AOD} = 2\widehat{B_1} = \widehat{AID}$ nên A, D, O, I thuộc cùng một đường tròn. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra sau điểm A, D, I, K, H, O thuộc cùng một đường tròn.

Scanned with CamScanner

c) $\widehat{DHO} = \widehat{DAO} = 90^o - \dfrac{\widehat{AOD}}{2} = 90^o - \widehat{C_1}$, (4)

$\widehat{DNC} = \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = \dfrac{180^o - \widehat{NKD}}{2} + \widehat{C_2} = 90^o - \widehat{NCD} + \widehat{C_2}$

$= 90^o - \left(\widehat{C_1} + \widehat{C_2}\right) + \widehat{C_2} = 90^o - \widehat{C_1}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra HO // BC.

125. Nếu cạnh lớn nhất là cạnh bên thì tổng hai đáy bằng $26 - 11 \cdot 2 = 4$ (cm) nên diện tích $S \le \dfrac{4 \cdot 11}{2} = 22 < 32$, loại.

Vậy cạnh lớn nhất là cạnh đáy. Xét hình thang ABCD (AB // CD) có đáy lớn là CD = 11 cm.

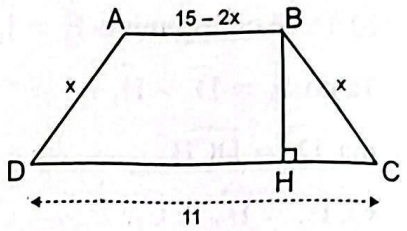
Đặt AD = BC = x thì AB = 15 – 2x.

Kẻ đường cao BH, ta tính được

$MC = x - 2$, $BH = 2\sqrt{x-1}$,

$S = (26 - 2x)\sqrt{x-1}$. Ta có

$(26 - 2x)\sqrt{x-1} = 32 \Leftrightarrow (13 - x)\sqrt{x-1} = 16$. (1)



Hình 221

Đặt $\sqrt{x-1} = y \ge 0$ thì

$(1) \Leftrightarrow \left(12 - y^2\right)y = 16 \Leftrightarrow y^3 - 12y + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)^2(y+4) = 0$.

Ta được y = 2 nên x = 5.

Vậy AD = AB = BC = 5 cm.

126. (h.222) a) Trước hết hãy chứng minh BI = CK.

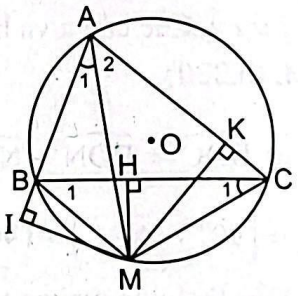
b) Do DM // EI nên $S_{AME} = S_{ADI}$.

Do DN // EK nên $S_{ANE} = S_{ADK}$.

Suy ra

$S_{AMEN} = S_{ADI} + S_{ADK}$

$= \dfrac{1}{2}(AI + AK).DM = \dfrac{1}{2}(AB + AC).DM = S_{ABC}$.



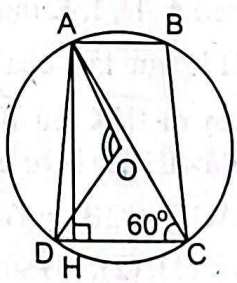
Hình 222

127. (h.223)

$\widehat{AOD} = 120^o \Rightarrow \widehat{ACD} = 60^o$.

ΔAHC có $HC = h\cot 60^o = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.

Do HC bằng đường trung bình của hình thang nên diện tích hình thang bằng $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$.



Hình 223

Scanned with CamScanner

128. (h.224)

Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Đặt MN = x > 0. Ta có $\widehat{N}_1 = \widehat{D}$ (cùng bằng $\widehat{IAB}$).

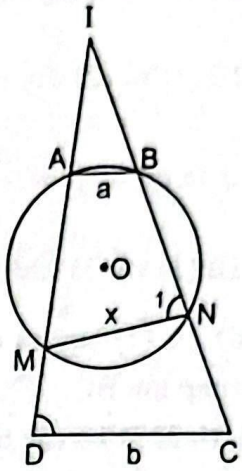
$$\Delta IAB \backsim \Delta INM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{INM}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2.$$

$$\Delta IDC \backsim \Delta INM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{IDC}}{S_{INM}} = \left(\frac{b}{x}\right)^2.$$

Đặt S là diện tích mỗi tứ giác ABNM, CDMN. Ta có

$$\frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{S_{IAB} + S_{ICD}}{S_{INM}} = \frac{(S_{INM} - S) + (S_{INM} + S)}{S_{INM}} = 2.$$

Suy ra $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.



Hình 224

129. (h.225)

a) Ta có IN = IM = IA nên $\widehat{ANM} = 90^\circ$.

Ta có AN // DE (cùng vuông góc với MN) nên ANDE là hình thang.

$\Delta IAE = \Delta IMD$ (g.c.g) nên $\widehat{AEI} = \widehat{MDI}$, mà

$\widehat{MDI} = \widehat{NDI}$ (đối xứng) nên $\widehat{AEI} = \widehat{NDI}$.

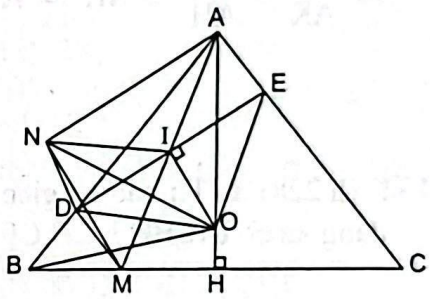
Hình thang ANDE là hình thang cân.

b) OI ⊥ DE và ID = IE nên OI là đường trung trực của DE và là trục đối xứng của hình thang cân.

$\Delta OND = \Delta OAE$ (c.c.c) nên

$$\widehat{OND} = \widehat{OAE} = \widehat{OAD},$$

suy ra tứ giác ANDO nội tiếp.



Hình 225

Ta lại có ANDE là tứ giác nội tiếp (vì là hình thang cân) nên A, N, D, O, E thuộc cùng một đường tròn.

c) OEAD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OEA} = \widehat{ODB}$.

Ta lại có OE = OD, EA = DB (cùng bằng DM) nên $\Delta OEA = \Delta ODB$ (c.g.c), suy ra OA = OB, mà OB = OC nên OA = OB = OC.

Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

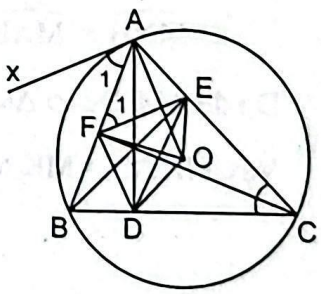
130. (h.226) a) Kẻ tiếp tuyến Ax. Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{F}_1$ (cùng bằng $\widehat{ACB}$) nên Ax // EF. Ta lại có Ax ⊥ OA nên OA ⊥ EF.

b) Tương tự câu a, ta có OB ⊥DF, OC ⊥DE.

$$S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE}$$

$$= \frac{OA}{2}.EF + \frac{OB}{2}.DF + \frac{OC}{2}.DE$$

$$= \frac{R}{2}(EF + DF + DE). (1)$$



Hình 226

Scanned with CamScanner

Dễ chứng minh $S_{DEF} = \frac{r}{2}(EF + DF + DE)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R}$.

c) Ta có $S_{ABC} = \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot r$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\frac{EF + DF + DE}{AB + BC + CA} = \frac{r}{R}$.

d) Từ (1) suy ra chu vi ΔDEF lớn nhất $\Leftrightarrow S_{ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ A là điểm giữa của cung lớn BC.

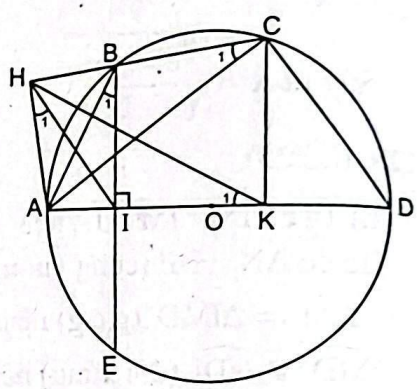
131. (h.227) Từ các tứ giác nội tiếp, ta có

$\widehat{H_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{K_1} = \widehat{C_1}$.

Gọi E là giao điểm của BI và (O), do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$, suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{K_1}$.

$\Delta AHI \backsim \Delta AKH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AH}{AK} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow AH^2 = AI \cdot AK$.



Hình 227

132. (h.228) a) Từ các tứ giác nội tiếp và các tam giác đồng dạng, ta có BH.BE + CH.CF = BD.BC + CD.CB

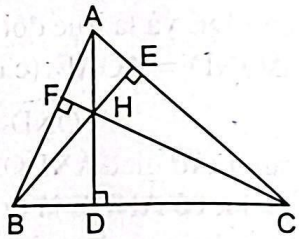
$= BC(BD + CD) = BC^2$.

b) Tương tự ta có

$CH.CF + AH.AD = AC^2$,

$AH.AD + BH.BE = AB^2$.

Bạn đọc tự giải tiếp.



Hình 228

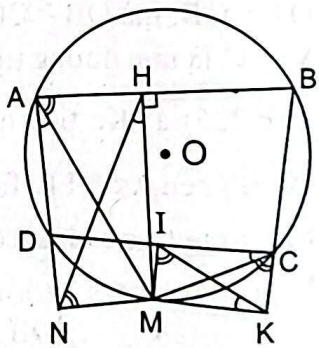
133. (h.229) Từ các tứ giác nội tiếp, ta có

$\overset{\frown}{MHN} = \overset{\frown}{MAN} = \overset{\frown}{MCD} = \overset{\frown}{MKI}$,

$\overset{\frown}{MNH} = \overset{\frown}{MAH} = \overset{\frown}{MCK} = \overset{\frown}{MIK}$.

Do đó $\Delta MHN \backsim \Delta MKI$ (g.g), suy ra $\frac{MH}{MK} = \frac{MN}{MI}$.

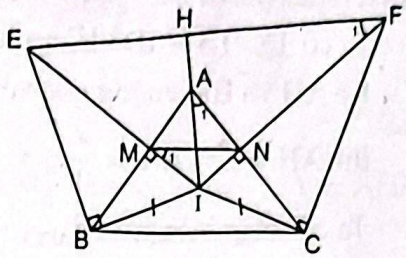
Vậy MH.MI = MK.MN.



Hình 229

Scanned with CamScanner

134. (h.230) Gọi H là giao điểm của IA và EF. Hình vẽ ứng với A nằm giữa I và H, các trường hợp khác tương tự.



Hình 230

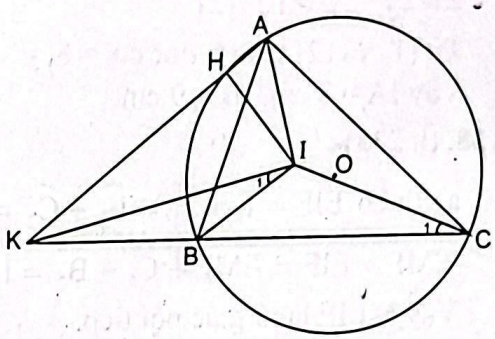
Ta có $IM \cdot IE = IB^2 = IC^2 = IN \cdot IF$ nên EMNF là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{F_1}$, mà $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{F_1} = \widehat{A_1}$, do đó tứ giác ANFH nội tiếp.

Vậy $\widehat{AHF} = 90^\circ$, tức là $IA \perp EF$.

135. (h.231) Ta có $\widehat{AIB} = 90^\circ + \widehat{I_1}$

và $\widehat{AIB} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}$ nên $\widehat{I_1} = \dfrac{\widehat{C}}{2} = \widehat{C_1}$.



Hình 231

$\Delta KIB \backsim \Delta KCI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KI}{KC} = \dfrac{KB}{KI} \Rightarrow KB \cdot KC = KI^2$

Ta lại có $KB \cdot KC = KH \cdot KA$

nên $KH \cdot KA = KI^2$, do đó $\dfrac{KH}{KI} = \dfrac{KI}{KA}$.

$\Delta KHI \backsim \Delta KIA$ (c.g.c) nên $\widehat{KHI} = \widehat{KIA} = 90^\circ$. Vậy $IH \perp AK$.

136. *Cách 1* (h.232). Tứ giác ADMF nội tiếp nên $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$. (1)

Lấy K đối xứng với C qua F. Ta có MF là đường trung bình của $\Delta BCK \Rightarrow MF \,//\, BK$

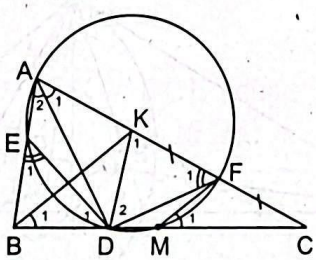
$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow$ ABDK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{K_1}$. (3)

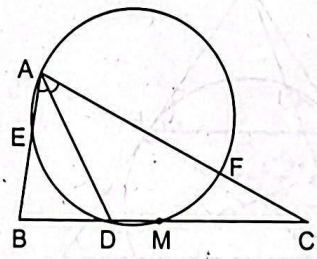
Tứ giác AEDF nội tiếp nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$. Ta lại có DE = DF nên $\Delta BDE = \Delta KDF$ (g.c.g)

$\Rightarrow BE = KF = CF$.



Hình 232



Hình 233

Cách 2. (h.233) $BE.BA = BD.BM$ nên $BE = \dfrac{BD}{BA} \cdot BM$

$CF.CA = CM.CD$ nên $CF = \dfrac{CD}{CA}.CM$

Do $BM = CM$, $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CD}{CA}$ (tính chất đường phân giác) nên $BE = CF$.

Scanned with CamScanner

137. (h.234) Đặt IA = x, IB = y.

Ta có $IA \cdot IB = ID \cdot IC \Rightarrow xy = 6 \cdot 12 = 72$ (1)

Kẻ AH và BK vuông góc với IC

thì $AH = \frac{x}{2}$, $BK = \frac{y}{2}$.

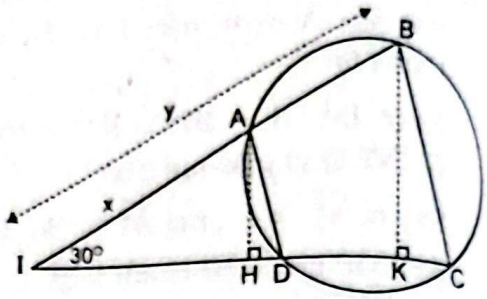
Ta có $S_{IBC} - S_{IAD} = S_{ABCD}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{x}{2} = 15$

$\Rightarrow 2y - x = 10$ (2)

Từ (1) và (2) ta tính được x = 8, y = 9.

Vậy IA = 8 cm, IB = 9 cm.



Hình 234

138. (h.235)

a) Ta có $\widehat{EIF} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \widehat{B_1} + \widehat{C_2} = \widehat{C_1} + \widehat{B_2}$ nên

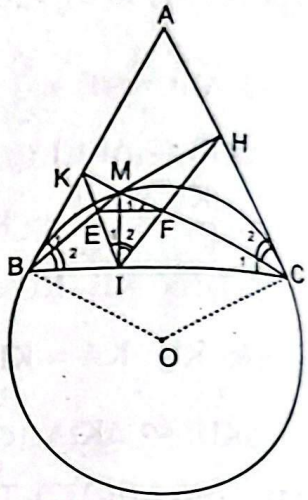
$\widehat{EMF} + \widehat{EIF} = \widehat{EMF} + \widehat{C_1} + \widehat{B_2} = 180°$.

Vậy MEIF là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác MEIF nội tiếp nên $\widehat{F_1} = \widehat{I_1}$.

Ta lại có $\widehat{I_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ nên $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$. Vậy EF // BC.

c) Suy ra từ câu b.



Hình 235

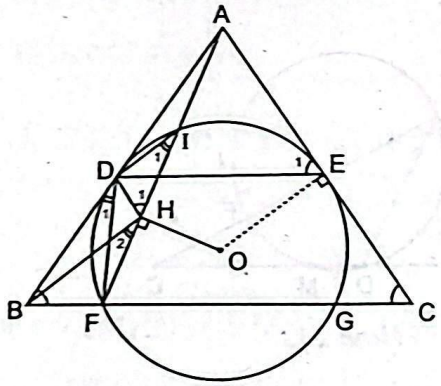
139. (h.236)

a) Dễ chứng minh A, D, H, O, E cùng thuộc đường tròn đường kính OA nên $\widehat{H_1} = \widehat{E_1}$.

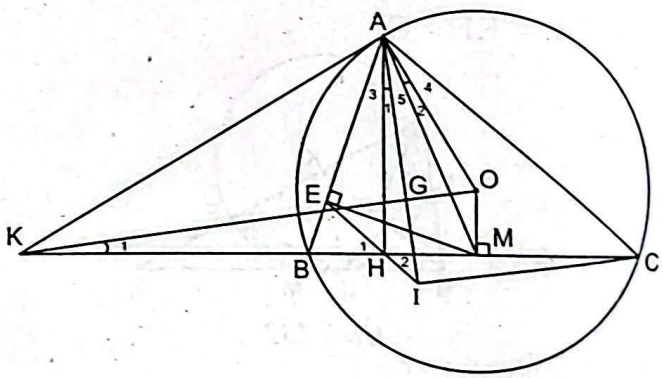
Ta có $\widehat{H_1} = \widehat{E_1} = \widehat{C} = \widehat{ABC}$ nên BDHF là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của AF với đường tròn (O). Ta có $\widehat{I_1} = \widehat{D_1} = \widehat{H_2}$ nên HB // ID.

ΔDFI có FH = HI và HB // AD nên HB đi qua trung điểm của DF.



Hình 236



Hình 237

140. (h.237)

a) Tứ giác AKHG nội tiếp nên $\widehat{A_1} = \widehat{K_1}$.

Tứ giác AKMO nội tiếp nên $\widehat{K_1} = \widehat{A_2}$. Vậy $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Scanned with CamScanner

b) Dễ chứng minh $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ (phụ với $\widehat{ABC}$) mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên

$$\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{A_5} = \widehat{A_4} + \widehat{A_2} + \widehat{A_5}$$

suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{IAC}$.

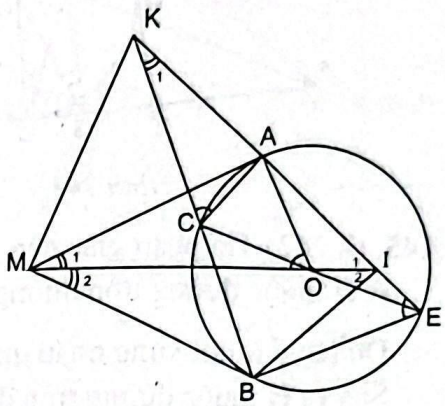
Ta lại có $\widehat{EAM} = \widehat{H_1}$ (tứ giác AEHM nội tiếp), $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ nên $\widehat{IAC} = \widehat{H_2}$. Vậy AHIC là tứ giác nội tiếp.

c) Tứ giác AHIC nội tiếp nên $\widehat{AIC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$. OK // CI vì cùng vuông góc với AI.

141. (h.238) Tứ giác ACBE nội tiếp nên $\widehat{ACK} = \widehat{AEB} = \widehat{AOM}$, do đó các góc phụ với chúng bằng nhau: $\widehat{K_1} = \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

Gọi I là giao điểm của MO và AE.

Tứ giác KMBI nội tiếp, lại có $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối xứng) nên MK = MB = MA.



Hình 238

142. (h.239) a) Lần lượt chứng minh:

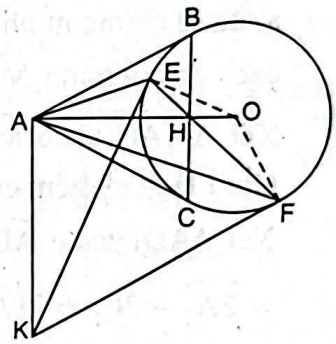
HO.HA = HB.HC = HE.HF.

Từ đó AEOF là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có OE = OF nên AO là tia phân giác của góc EAF.

b) AEOF và OEKF là các tứ giác nội tiếp nên O, E, A, K, F thuộc cùng một đường tròn.

Suy ra $\widehat{OAK} = \widehat{OEK} = 90^\circ$.



Hình 239

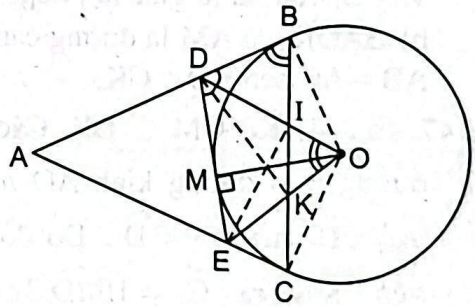
143. (h.240) a) $\widehat{DBK} = \widehat{DOE}$ (cùng bằng nửa số đo cung BC) nên OBDK là tứ giác nội tiếp.

ΔDBI và ΔDOE có $\widehat{DBI} = \widehat{DOE}$, $\widehat{BDI} = \widehat{ODE}$ nên $\widehat{BID} = \widehat{OED}$ suy ra DIKE là tứ giác nội tiếp.

b) OBDK là tứ giác nội tiếp (câu a), mà $\widehat{OBD} = 90^\circ$ nên $\widehat{OKD} = 90^\circ$, do đó DK ⊥ OE.

Tương tự EI ⊥ OD. Ta lại có OM ⊥ DE.

Vậy OM, DK, EI đồng quy.



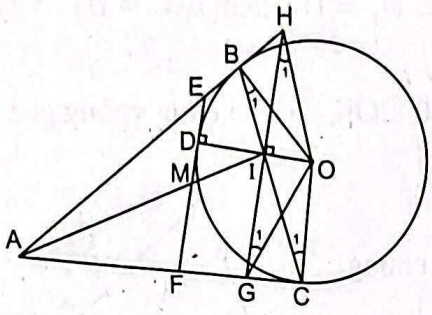
Hình 240

Scanned with CamScanner

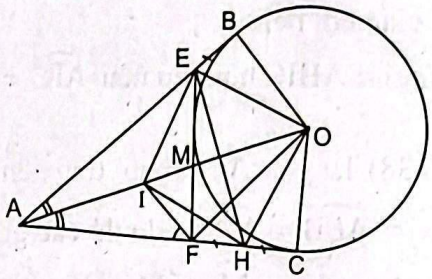
144. (h.241) Qua I, kẻ đường thẳng song song với EF, cắt AB và AC theo thứ tự ở H và G. Ta sẽ chứng minh IH = IG.

Giả sử $\overset{\frown}{DB} \le \overset{\frown}{DC}$. Các tứ giác OIGC, OIBH nội tiếp nên $\widehat{H_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \widehat{G_1}$.

ΔOGH cân có $OI \perp GH$ nên IH = IG. Dễ dàng chứng minh ME = MF.



Hình 241



Hình 242

145. (h.242) Tia phân giác của góc AFE cắt AO ở I thì $\widehat{IFO} = 90^\circ$. Ta sẽ chứng minh E, F, H thuộc đường tròn đường kính IO. Chỉ cần chứng minh H thuộc đường tròn đó.

Do H và E đối xứng nhau qua AO nên $\widehat{IHO} = \widehat{IEO} = 90^\circ$.

Suy ra H thuộc đường tròn đường kính IO.

Vậy O, E, F, H thuộc đường tròn đường kính IO.

146. (h.243)

a) Ta sẽ chứng minh tứ giác DMOE nội tiếp bằng cách chứng minh $\widehat{M_1} = \widehat{D_1}$.

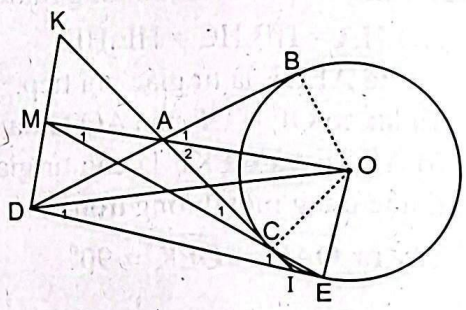
Xét ΔMAC ta có $\widehat{M_1} = \widehat{A_2} - \widehat{C_1}$ (1)

Gọi I là giao điểm của AC và DE.

Xét ΔADI ta có $\widehat{ADE} = \widehat{BAI} - \widehat{I_1}$

$= 2\widehat{A_2} - 2\widehat{C_1} = 2\left(\widehat{A_2} - \widehat{C_1}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{M_1} = \frac{1}{2}\widehat{ADE} = \widehat{D_1}$.



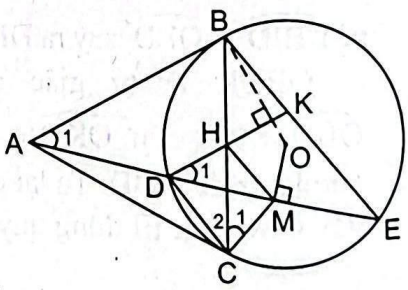
Hình 243

Vậy DMOE là tứ giác nội tiếp, mà $\widehat{OED} = 90^\circ$ nên $\widehat{OMD} = 90^\circ$.

b) ΔADK có AM là đường cao và phân giác nên là tam giác cân, AD = AK. Ta lại có AB = AC nên BD = CK.

147. (h.244) Kẻ $OM \perp DE$. Các điểm B, C, M thuộc đường tròn đường kính AO nên $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$. Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$. Do đó CDHM là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{HMD}$. Ta lại có $\widehat{C_2} = \widehat{E}$ nên $\widehat{HMD} = \widehat{E}$, do đó MH // EB.

Dễ dàng chứng minh DH = HK.



Hình 244

Scanned with CamScanner

b) Tứ giác IHBD nội tiếp nên $\widehat{HBI} = \widehat{D_2}$ tức là $\widehat{ABI} = \widehat{D_2}$.

Ta lại có $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ mà $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên $\widehat{ABI} = \widehat{ABC}$.

Vậy ba điểm B, I, C thẳng hàng.

151. (h.248)

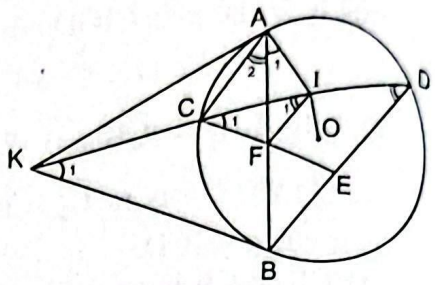
a) CE // KB nên $\widehat{C_1} = \widehat{K_1}$.

Năm điểm K, A, I, O, B thuộc một đường tròn nên $\widehat{K_1} = \widehat{A_1}$.

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$, vậy AIFC là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác AIFC nội tiếp nên $\widehat{I_1} = \widehat{A_2}$. Ta lại có $\widehat{A_2} = \widehat{D}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{D}$, suy ra IF // DB.

ΔCDE có IC = ID và IF // DE nên FC = FE.



Hình 248

152. (h.249)

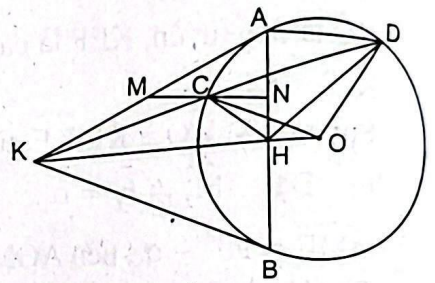
a) Ta có $KH \cdot KO = KA^2 = KC \cdot KD$ nên CHOD là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{OHD} = \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{CHK}$. Ta lại có HA ⊥ OK nên HA là tia phân giác của góc CHD.

b) Ta sẽ chứng minh $\frac{CM}{AD} = \frac{CN}{AD}$.

Do MN // AD nên $\frac{CM}{AD} = \frac{KC}{KD}$ và $\frac{CN}{AD} = \frac{EC}{ED}$.

ΔCHD có HE là đường phân giác góc trong, HK là đường phân giác góc ngoài nên $\frac{KC}{KD} = \frac{EC}{ED}$ (cùng bằng $\frac{HC}{HD}$). Suy ra $\frac{CM}{AD} = \frac{CN}{AD}$. Vậy CM = CN.



Hình 249

153. (h.250)

a) $\Delta KDA \backsim \Delta KCD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KA}{KD} = \frac{AD}{DC}$.

Tương tự $\frac{KA}{KB} = \frac{AB}{BC}$.

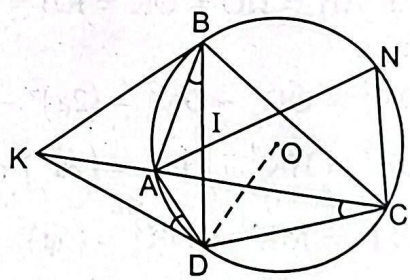
Do KD = KB nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$,

do đó AB.CD = AD.BC.

b) $\Delta AIB \backsim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AD}{DC}$.

Tương tự $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BC}$.

Do $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (câu a) nên $\frac{AI}{IB} = \frac{AI}{ID}$, suy ra IB = ID.



Hình 250.

Scanned with CamScanner

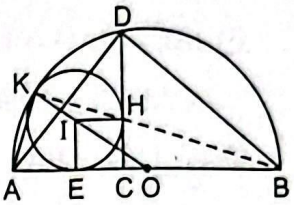
Chú ý: Từ câu a của bài toán trên, ta suy ra: Nếu một tứ giác nội tiếp có các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại hai đỉnh đối diện đồng quy với đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại thì tích các cặp cạnh đối của tứ giác đó bằng nhau.

Bằng phản chứng, ta cũng chứng minh được bài toán đảo: Nếu một tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau thì các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại hai đỉnh đối diện đồng quy với đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

154. (h.251)

a) ΔABD vuông nên $BD^2 = BC.BA$. (1)

Gọi K là tiếp điểm của (I) và (O). Kẻ $IH \perp CD$. Các tam giác cân IKH và OKB có góc ở đỉnh bằng nhau nên $\widehat{IKH} = \widehat{OKB}$ do đó K, H, B thẳng hàng.



Hình 251.

BE là tiếp tuyến, BHK là cát tuyến của đường tròn (I)

nên $BE^2 = BH.BK$. Nhưng $BH.BK = BC.BA$ (do AKHC là tứ giác nội tiếp)

nên $BE^2 = BC.BA$. (2)

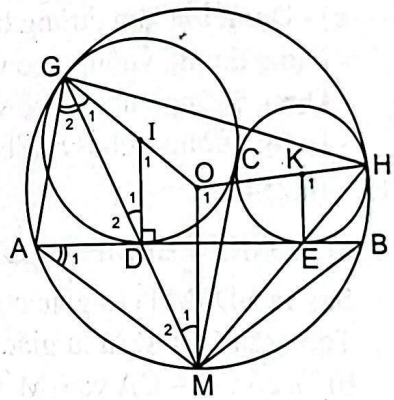
Từ (1) và (2) suy ra BD = BE.

b) Suy ra từ câu a.

155. (h.252) a) Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{G_1} = \widehat{I_1}$ nên OM // ID.

Do đó OM // KE.

Các tam giác cân OHM và KHE có góc ở đỉnh bằng nhau $\widehat{O_1} = \widehat{K_1}$ nên $\widehat{OHM} = \widehat{KHE}$, do đó H, E, M thẳng hàng.



Hình 252.

b) Ta có OM ⊥ AB nên $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, (1)

$\widehat{D_2} = \widehat{A_1} + \widehat{M_2} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MB} + \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AG}$, (2)

$\widehat{GHM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MG} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MA} + \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AG}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{D_2} = \widehat{GHM}$ nên GDEH là tứ giác nội tiếp.

c) Giả sử MC có giao điểm thứ hai với (I) là C_1, với (K) là C_2.

Ta có $MC \cdot MC_1 = MD \cdot MG$, $MC \cdot MC_2 = ME \cdot MH$.

Ta lại có $MD \cdot MG = ME \cdot MH$ (vì tứ giác GDEH nội tiếp) nên

$MC \cdot MC_1 = MC \cdot MC_2$, do đó C_1 trùng C_2.

Do C_1, C_2 thuộc cả hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc ngoài tại C nên C_1, C_2 trùng C và MC là tiếp tuyến chung của (I) và (K).

d) MC là tiếp tuyến của (I) nên $MC^2 = MD \cdot MG$. (4)

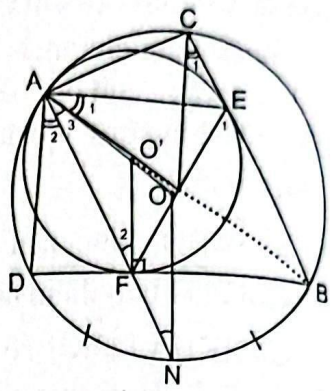
$\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow \widehat{G_2} = \widehat{A_1} \Rightarrow \Delta MGA \backsim \Delta MAD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MG}{MA} \Rightarrow MA^2 = MD \cdot MG$. (5)

Scanned with CamScanner

Từ (4) và (5) suy ra MA = MC. Tương tự MB = MC.
Vậy MA = MB = MC.

156. (h.253)



Hình 253.

a) $\overset{\frown}{CAD} = 180^\circ - \hat{B}$,

$\overset{\frown}{EAF} = \hat{F}_1 = \hat{E}_1 = \dfrac{180^\circ - \hat{B}}{2}$. Vậy $\overset{\frown}{CAD} = 2\overset{\frown}{EAF}$.

b) $\overset{\frown}{IAC} = \overset{\frown}{IAD} = \overset{\frown}{EAF}$ (suy từ câu a) $= \hat{E}_1$

$\Rightarrow$ CAIE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1$.(1)

Ta có $\overset{\frown}{IAD} = \overset{\frown}{EAF}$, cùng trừ đi $\overset{\frown}{IAF}$ được $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{C}_1 = \hat{A}_2$. (3)

Gọi N là giao điểm của AF và (O). Ta có $\hat{N} = \hat{A}_3 = \hat{F}_2$

$\Rightarrow$ ON // O'F $\Rightarrow$ ON $\perp$ BD $\Rightarrow \overset{\frown}{ND} = \overset{\frown}{NB} \Rightarrow \hat{A}_2 = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra CI tia phân giác của góc BCD.
Ta lại có BI là tia phân giác của góc CBD nên I là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCD.

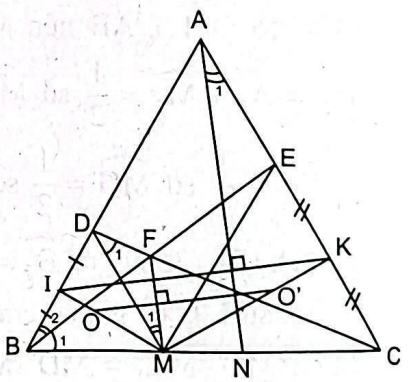
c) - Dựng I là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCD.
- Dựng đường vuông góc với BI tại I, cắt BC và BD ở E và F.
- Dựng đường vuông góc với BD tại F, cắt BI ở O',
- Dựng đường tròn (O';O'F).

157. (h.254)

a) $\Delta DMC = \Delta BME$ (c.g.c) nên $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$.

Suy ra BDFM là tứ giác nội tiếp.
Tương tự CEFM là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có CB = CA và CM = CE nên BM = AE. (1)
Ta sẽ chứng minh AE = CN.
Gọi O, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp các tứ giác BDFM, CEFM thì $OO' \perp MF$.



Hình 254.

Ta có $\dfrac{MO}{OI} = \dfrac{MO'}{O'K}$ (= 2) nên OO' // IK.

Suy ra $IK \perp MF$.

Do $IK \perp AN$ nên MF // AN. Ta lại có MD // AC nên $\hat{M}_1 = \hat{A}_1$. (2)

BDFM là tứ giác nội tiếp nên $\hat{M}_1 = \hat{B}_2$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$. Do đó $\Delta ABE = \Delta CAN$ (g.c.g), suy ra AE = CN. (4)

Từ (1) và (4) suy ra BM = CN.

Scanned with CamScanner

158. (h.255)

a) Trên OE lấy I sao cho OI = OD.

$\Delta BOI = \Delta COD$ (c.g.c) nên BI = CD và $\widehat{I_1} = \widehat{D_1}$.

Ta có $\widehat{A} = 60^o$ nên $\overset{\frown}{BOC} = 120^o$, suy ra tứ giác ADOE nội tiếp, do đó $\widehat{D_1} = \overset{\frown}{AEO}$.

Suy ra $\overset{\frown}{AEO} = \widehat{I_1}$, do đó $\overset{\frown}{BEO} = \widehat{I_2}$ và BI = BE.

Vậy BE = CD.

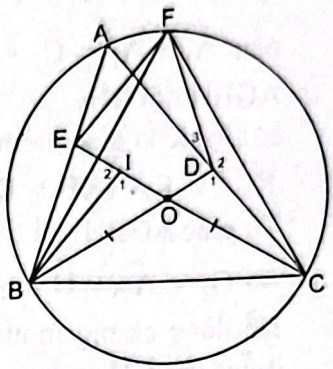
b) Ta đã có ADOE là tứ giác nội tiếp.

Ta sẽ chứng minh AEDF là tứ giác nội tiếp.

$\Delta EBF = \Delta DCF$ (c.g.c) nên $\overset{\frown}{BEF} = \widehat{D_2}$.

Suy ra $\overset{\frown}{AEF} = \widehat{D_3}$, do đó tứ giác AEDF nội tiếp.

Vậy năm điểm A, E, O, D, F thuộc cùng một đường tròn.



Hình 255.

159. (h.256)

a) $\overset{\frown}{ODA} = \overset{\frown}{OAD} = \overset{\frown}{O'AC} = \overset{\frown}{O'CA}$ nên tứ giác CDOO' nội tiếp.

$\overset{\frown}{ODO'} + \overset{\frown}{OBO'} = \overset{\frown}{OAD} + \overset{\frown}{OAO'} = 180^o$

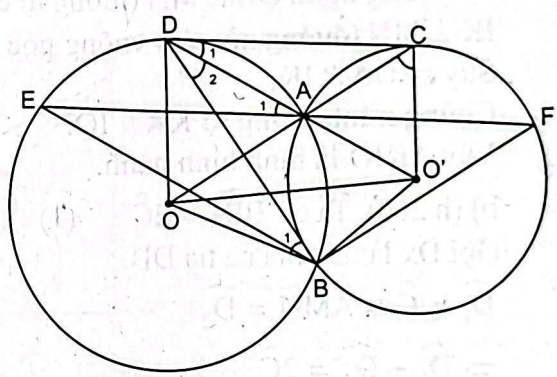
nên tứ giác OBO'D nội tiếp.

Vậy năm điểm B, O, O', C, D thuộc cùng một đường tròn.

b) Xét đường tròn đi qua năm điểm trên, do O'C = O'B nên $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$.

Ta lại có $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (do CD // EF) nên $\widehat{A_1} = \widehat{D_2}$.

Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ nên $\widehat{D_2} = \widehat{B_1}$, suy ra AD // BE. Tương tự AC // BF.



Hình 256

160. (h.257)

a) $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$, $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ nên $\Delta ABC \backsim \Delta DBA$ (g.g).

b) Ta sẽ chứng minh $\overset{\frown}{BEC} = \overset{\frown}{BFA}$ nhờ tam giác đồng dạng.

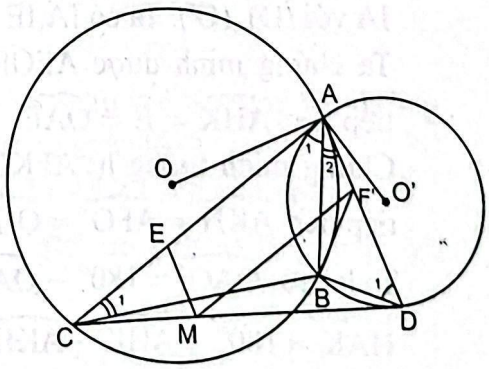
AEMF là hình bình hành nên $\dfrac{EC}{AF} = \dfrac{EC}{EM} = \dfrac{AC}{AD}$. (1)

Từ câu a ta có $\dfrac{CB}{AB} = \dfrac{AC}{AD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EC}{AF} = \dfrac{CB}{AB}$,

từ đó $\Delta BEC \backsim \Delta BFA$ (c.g.c) nên $\overset{\frown}{BEC} = \overset{\frown}{BFA}$.

Vậy AEBF là tứ giác nội tiếp.



Hình 257

Scanned with CamScanner

161. (h.258)

a) $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{D_1}$

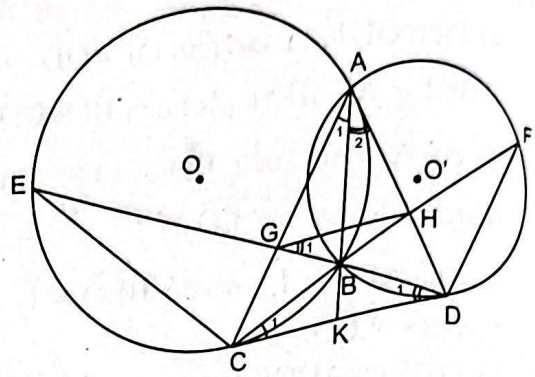
nên $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ do đó tứ giác AGBH nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Ta có $KC^2 = KA \cdot KB = KD^2$ nên KC = KD.

Tứ giác AGBH nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{A_2} = \widehat{D_1} \Rightarrow$ GH // CD.

Dễ dàng chứng minh được AK đi qua trung điểm của GH.



Hình 258

162. a) (h.259 ứng với các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC; các trường hợp khác chứng minh tương tự).

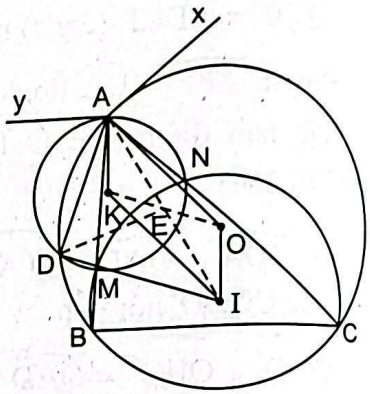
Dễ chứng minh OA ⊥ MN (tương tự câu a bài 169),

IK ⊥ MN (đường nối tâm vuông góc với dây chung).

Suy ra OA // IK.

Chứng minh tương tự KA // IO.

Vậy AKIO là hình bình hành.



Hình 259

b) (h.260) Ta có $\widehat{BIN} = 2\hat{C}$ (1)

Gọi Dx là tia đối của tia DB.

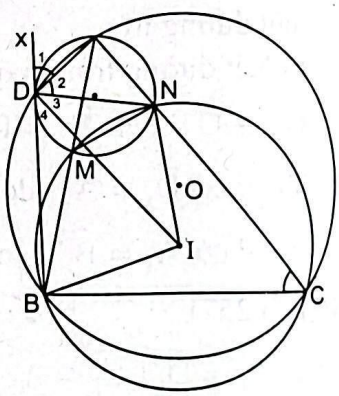
$\widehat{D_1} = \hat{C} = \widehat{AMN} = \widehat{D_2}$

$\Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 2\hat{C}$

$\Rightarrow \widehat{NDx} = 2\hat{C}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BIN} = \widehat{NDx}$ nên tứ giác BIND nội tiếp. Ta lại có IN = IB nên $\widehat{D_3} = \widehat{D_4}$.

Vậy $\widehat{ADI} = 90^\circ$.



Hình 260

163. Trường hợp CD // OO', dễ chứng minh.

Giả sử CD cắt OO' tại I (h.261). Gọi E, F là giao điểm của IA với (O), (O'). Ta có $IA.IE = IC^2 = IO.IH$.

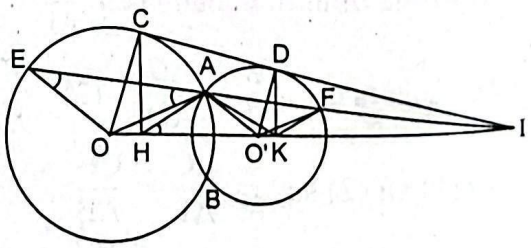
Ta chứng minh được AEOH là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AHK} = \hat{E} = \widehat{OAE}$. (1)

Chứng minh tương tự AFKO' là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AKH} = \widehat{AFO'} = \widehat{O'AF}$. (2)

Ta lại có $\widehat{OAO'} = 180^\circ - \widehat{OAE} - \widehat{O'AF}$, (3)

$\widehat{HAK} = 180^\circ - \widehat{AHK} - \widehat{AKH}$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$.

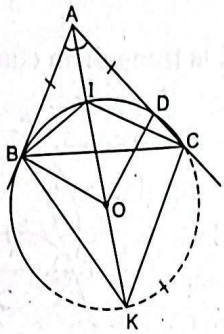


Hình 261

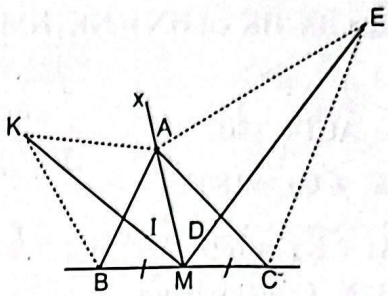
Scanned with CamScanner

164. (h.262) BICK là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) đường kính IK. Trên tia AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Ta có ΔOAB = ΔOAD (c.g.c) nên OB = OD. Do đó D thuộc đường tròn (O). Dễ dàng chứng minh

$$AI.AK = AD.AC = AB.AC.$$



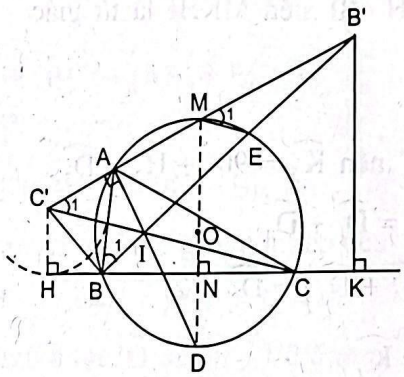
Hình 262



Hình 263

b) (h.263) Áp dụng câu a ta có MI.MK=MA.MB và MD.ME=MA.MC. Do MB = MC nên MI.MK = MD. ME. Từ đó IKED là tứ giác nội tiếp.

165. (h.264).



Hình 264

Cách 1. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có B, I, B' thẳng hàng. Gọi E là giao điểm của BB' và (O). Dễ chứng minh E là trung điểm của IB'. (1)

Ta sẽ chứng minh ME// C'I. Ta có

$\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$ (ABEM là tứ giác nội tiếp),

$\widehat{B}_1 = \widehat{C}'_1$ (AIBC' là tứ giác nội tiếp),

suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{C}'_1$ do đó ME // C'I. (2)

Từ (1) , (2) suy ra M là trung điểm của B'C'.

Chú ý: Từ bài toán này suy ra mệnh đề: Trung điểm của đoạn nối tâm của hai đường tròn bàng tiếp tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Một cách khác chứng minh mệnh đề đó: xem Bài tập 35. Một cách khác nữa:

Gọi M là trung điểm của B'C'. Chứng minh $\overset{\frown}{CMB'} = \overset{\frown}{ABC} \Rightarrow$ ABCM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Scanned with CamScanner

Cách 2. (không sử dụng tứ giác nội tiếp)

Gọi D là giao điểm của tia phân giác góc A với (O) thì M, O, D thẳng hàng và MD vuông góc với BC tại trung điểm N của BC.

Kẻ C'H, B'K vuông góc với BC. Ta có CH = BK (cùng bằng nửa chu vi ΔABC) nên CK = BH. Do đó N là trung điểm của HK.

Hình thang B'C'HK có HN = NK, NM // B'K nên M là trung điểm của B'C'.

166. (h.265)

a) $\widehat{ABI} + \widehat{ACI} = 180^\circ$

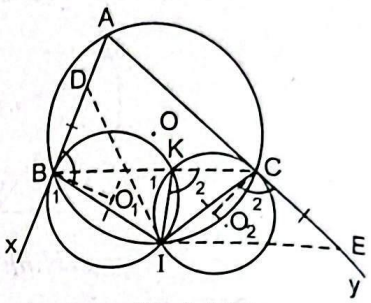
$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 180^\circ$

$\Rightarrow$ B, K, C thẳng hàng.

b) ΔIBD = ΔICE (c.g.c) nên $\widehat{IDB} = \widehat{IEC}$.

Tứ giác ADIE là tứ giác nội tiếp. Điểm cố định là I.



Hình 265

167. (h.266)

a) $BK \cdot BM = BD^2 = BH \cdot BI$ nên MKHI là tứ giác nội tiếp.

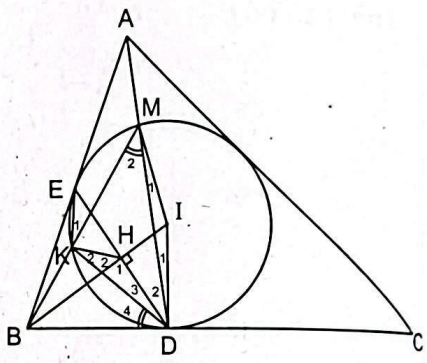
b) Ta có $\widehat{K_1} = \widehat{D_2}$.(1)

Xét ΔDHK, do $\widehat{H_1} = 90^\circ$ nên $\widehat{K_2} = 90^\circ - \widehat{H_2} - \widehat{D_3}$.

Ta lại có $\widehat{H_2} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{D_1} + \widehat{D_4}$

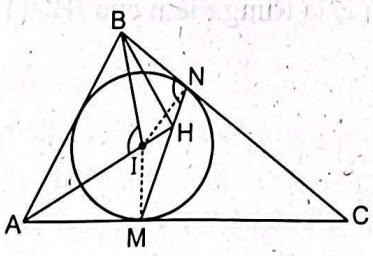
nên $\widehat{K_2} = 90^\circ - \left(\widehat{D_1} + \widehat{D_4} + \widehat{D_3}\right) = \widehat{D_2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$.

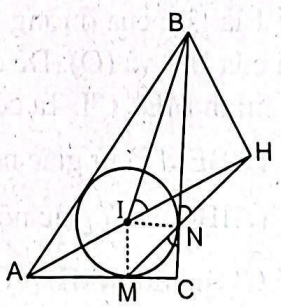


Hình 266

168. (h.267) Lấy giao điểm của MN với tia AI cố định, ta được điểm H.



a)



b)

Hình 267

Trường hợp H thuộc đoạn MN (h.267a). Ta có $\widehat{BNH} = \widehat{BIA}$ (cùng bằng $90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$).

Suy ra BIHN là tứ giác nội tiếp.

Trường hợp H thuộc tia đối của tia NM (h.267b) . Do $\widehat{BIA} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$ nên

Scanned with CamScanner

$\widehat{BIH} = 90^\circ - \dfrac{\hat{C}}{2} = \widehat{CNM} = \widehat{BNH}$. Suy ra BINH là tứ giác nội tiếp.

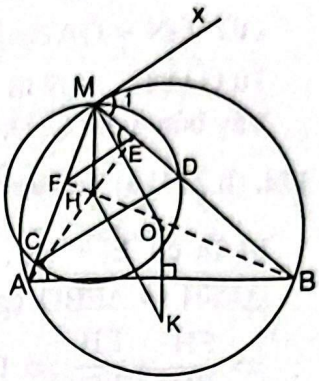
Trong cả hai trường hợp, ta đều có $BH \perp AI$. Vậy H là điểm cố định.

169. (h.268)

a) Kẻ tiếp tuyến Mx với (O). Ta có $\widehat{M}_1 = \hat{A} = \widehat{MEF}$ nên Mx // EF. Do đó $OM \perp EF$.

b) FE là đường trung bình của ΔMCD nên FE // CD. Suy ra $MO \perp CD$. Điểm cố định là điểm O.

c) Lấy K đối xứng với O qua AB. Chứng minh MHKO là hình bình hành. Điểm cố định là điểm K.



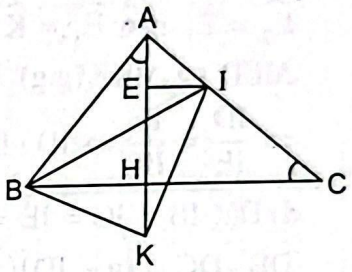
Hình 268

170. (h.269) Kẻ $IE \perp AH$. Ta có $AE = \dfrac{1}{3}AH = HK$ nên $AH = EK$. Ta có

$$BI^2 = BA^2 + AI^2 = (AH^2 + BH^2) + (AE^2 + EI^2)$$
$$= (AH^2 + EI^2) + (BH^2 + AE^2)$$
$$= (EK^2 + EI^2) + (BH^2 + HK^2) = IK^2 + BK^2.$$

Suy ra $\widehat{BKI} = 90^\circ$. Tứ giác ABKI là tứ giác nội tiếp nên

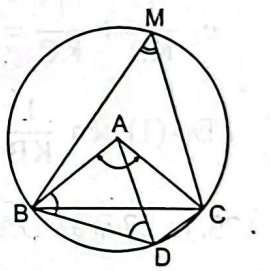
$$\widehat{BIK} = \widehat{BAH} = \hat{C} = 40^\circ.$$



Hình 269

171. (h.270) Xét ΔBCD ta tính được $\hat{D} = 130^\circ$. Vẽ đường tròn (A; AB), lấy M bất kì thuộc đường tròn đó (M và A cùng phía đối với BC). Do $\widehat{BAC} = 100^\circ$ nên $\widehat{BMC} = 50^\circ$. Do đó MBDC là tứ giác nội tiếp, tức là D thuộc đường tròn (A).

ΔABC cân tại A nên $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$.



Hình 270

172. (h.271) a) Gọi H là trực tâm của ΔABC cân tại A

$\widehat{ANH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$.

Các tứ giác BFHD và DHNM nội tiếp

$\Rightarrow AF.AB = AH.AD = AN.AM$

$\Rightarrow$ BFNM là tứ giác nội tiếp

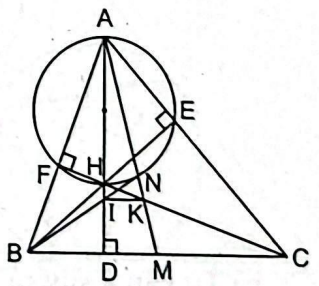
b) Ta sẽ chứng minh $\widehat{HIK} = 90^\circ$ bằng cách chứng minh HIKN là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{IHK} = \widehat{ABC}$ (1)

$\widehat{IHK} = \widehat{BNM} = \widehat{BFM} = \widehat{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác HIKN nội tiếp, mà $\widehat{HNK} = 90^\circ$ nên $\widehat{HIK} = 90^\circ$

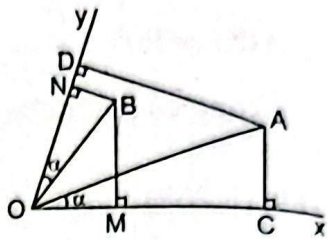
Suy ra IK // BC.



Hình 271

Scanned with CamScanner

173. (h.272) Đặt $\widehat{AOx} = \widehat{BOy} = \alpha$, $\widehat{AOy} = \widehat{BOx} = \beta$.



Hình 272

Ta có

$OC \cdot OM = OA\cos\alpha \cdot OB\cos\beta$ (1)

$OD \cdot ON = OA\cos\beta \cdot OB\cos\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OC \cdot OM = OD \cdot ON$.

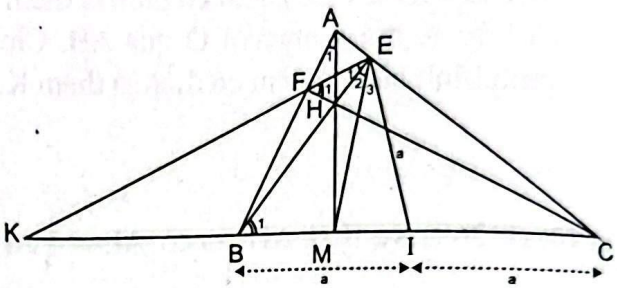
Vậy bốn điểm C, D, M, N thuộc cùng một đường tròn.

174. (h.273) a) Từ các tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1} = \widehat{E_2}$.

b) Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$, lại có $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}$ nên

$\Delta EFH \backsim \Delta EBD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{FH}{BD} = \dfrac{EH}{ED} \Rightarrow BD \cdot EH = DE \cdot FH$.



Hình 273

c) Ta có $\widehat{E_2} + \widehat{E_3} = \widehat{B_1} = \widehat{K} + \widehat{E_1}$ mà

$\widehat{E_2} = \widehat{E_1}$ nên $\widehat{E_3} = \widehat{K}$.

$\Delta IED \backsim \Delta IKE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{ID}{IE} = \dfrac{IE}{IK} \Rightarrow ID \cdot IK = IE^2$.

d) Đặt $IB = IC = IE = a$. Từ câu c ta có $ID \cdot IK = a^2$ (1)

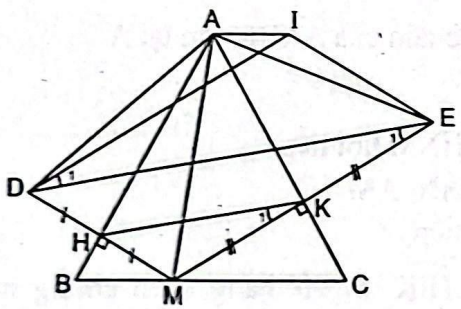
$DB \cdot DC = (a - ID)(a + ID) = a^2 - ID^2$.

Do (1) nên $DB \cdot DC = ID \cdot IK - ID^2 = ID(IK - ID) = DI \cdot DK$.

e) $\dfrac{1}{KB} + \dfrac{1}{KC} = \dfrac{KB + KC}{KB \cdot KC} = \dfrac{(IK - a) + (IK + a)}{(IK - a)(IK + a)} = \dfrac{2IK}{IK^2 - a^2}$.

Do (1) nên $\dfrac{1}{KB} + \dfrac{1}{KC} = \dfrac{2IK}{IK^2 - ID \cdot IK} = \dfrac{2IK}{IK(IK - ID)} = \dfrac{2}{KD}$.

175. (h.274) a) $\widehat{DAE}$ và $\widehat{DIE}$ cùng bằng 120^o.



Hình 274

b) Từ câu a suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{D_1}$. Gọi K là giao điểm của ME và AC. Ta có

$\widehat{D_1} = \widehat{E_1} = \widehat{K_1} = \widehat{MAB}$ nên $\widehat{IAE} = \widehat{MAB}$.

Ta lại có $\widehat{KAE} = \widehat{KAM}$. Suy ra $\widehat{CAI} = \widehat{CAB} = 60°$. Từ đó AI // BC.

Scanned with CamScanner

176. (h.275 ứng với $\overset{\frown}{MB} < \overset{\frown}{MC}$, các trường hợp khác tương tự)

a) Ta có $\widehat{K_1} = \widehat{K_2} = 30^\circ$, $\widehat{I_1} = 30^\circ$, $\overset{\frown}{AHD} = 30^\circ$.

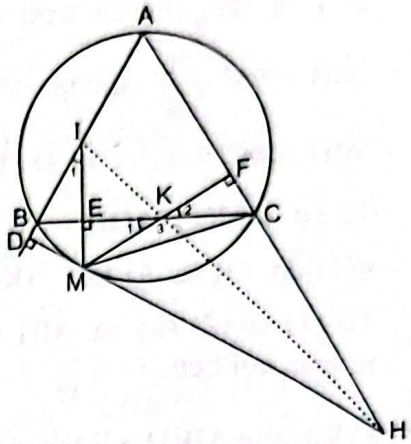
$\widehat{I_1} = \widehat{K_1} \Rightarrow$ tứ giác BIKM nội tiếp

$\Rightarrow \overset{\frown}{IKM} = \overset{\frown}{MBD} = \overset{\frown}{ACM}$ (1)

$\overset{\frown}{AHD} = \widehat{K_1} \Rightarrow$ tứ giác MKCH nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{K_3} = \widehat{C_1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{IKM} + \widehat{K_3} = \overset{\frown}{ACM} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ nên I, K, H thẳng hàng.



Hình 275

177. (h.276) Ta có

$\left(\sqrt{IM} + \sqrt{IN}\right)^2 = IM + IN + 2\sqrt{IM \cdot IN}$ (1)

Gọi F là giao điểm của IK và DE. Gọi G, H là giao điểm của AO với DE, BC.

$\widehat{F_1} = \widehat{D_1} = \widehat{E_1} = \widehat{N_1}$. Tương tự $\widehat{F_2} = \widehat{M_1}$.

$\Delta IFM \backsim \Delta INF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IF} = \dfrac{IF}{IN} \Rightarrow IM \cdot IN = IF^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

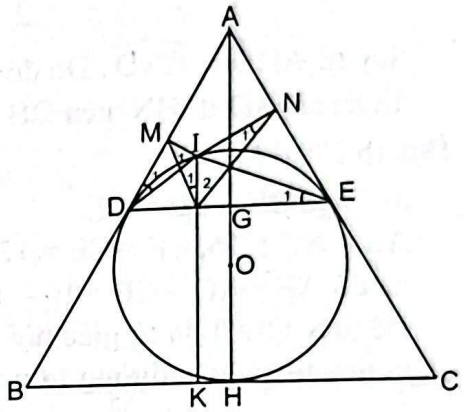
$\left(\sqrt{IM} + \sqrt{IN}\right)^2 = IM + IN + 2IF$

$= (IM + IN + IF) + IF$ (3)

ΔADE đều. Dễ chứng minh $IM + IN + IF = AG = GH = FK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\left(\sqrt{IM} + \sqrt{IN}\right)^2 = FK + IF = IK$.

Vậy $\sqrt{IM} + \sqrt{IN} = \sqrt{IK}$.



Hình 276

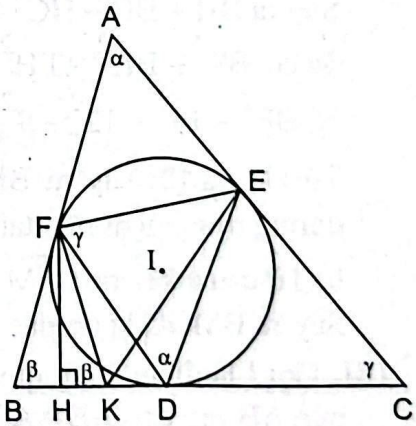
178. (h.277) Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$. Kẻ FH ⊥ BC. Gọi K là điểm đối xứng với B qua H thì

$BH < HD$ và $\overset{\frown}{FKB} = \widehat{B}$.

Tứ giác DEFK có $\overset{\frown}{FKB} = \overset{\frown}{DEF}$ (bằng β) nên là tứ giác nội tiếp. Như vậy đường tròn (I) nội tiếp ΔABC có hai điểm chung phân biệt K, D với BC, vô lí.

Vậy không thể $\widehat{B} > \widehat{C}$, tương tự không thể $\widehat{C} > \widehat{B}$, do đó $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Chứng minh tương tự $\widehat{B} = \widehat{A}$. Vậy ΔABC là tam giác đều.



Hình 277

Scanned with CamScanner

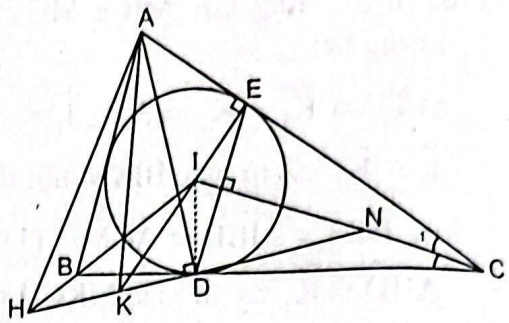
179. (h.278)

a) I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên $\widehat{AIB} = 90^o + \frac{\widehat{C}}{2}$ tức là

$\widehat{AIH} = 90^o + \widehat{C_1} = \widehat{AED}$ (1).

Ta có $\widehat{AEK} = \widehat{ADK} = 90^o$ nên tứ giác AEDK nội tiếp, suy ra $\widehat{AED} = \widehat{AKH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIH} = \widehat{AKH}$ nên AIKH là tứ giác nội tiếp.



Hình 278

b) Tứ giác AIKH nội tiếp nên $\widehat{AHD} = \widehat{AIE} = 90^o - \widehat{IAE} = 90^o - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Tương tự $\widehat{AND} = 90^o - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{AND}$. Do đó ΔAHN cân.

Ta lại có $AD \perp HN$ nên $DH = DN$.

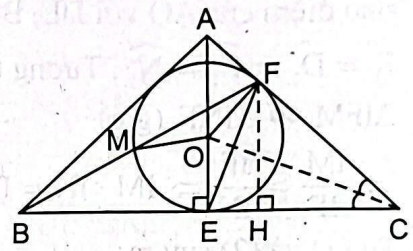
180. (h.279)

a) Ta có $BE = EC = 12$,

$AB = AC = 16$, $CF = CE = 12$,

do đó $AF = AC - CF = 16 - 12 = 4$.

Dễ thấy OECF là tứ giác nội tiếp. Để chứng tỏ BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó, ta sẽ chứng minh $BF^2 = BE.BC$.



Hình 279

Ta có $BE.BC = 12.24 = 288$. (1)

Để tính BF^2, ta kẻ $FH \perp BC$ nhằm tạo ra tam giác vuông BFH.

Ta có $FH // AE \Rightarrow \frac{CH}{CE} = \frac{CF}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = \frac{3}{4}CE = 9$.

Suy ra $BH = BC - HC = 24 - 9 = 15$.

Ta có $BF^2 - BH^2 = FH^2 = CF^2 - CH^2$

$\Rightarrow BF^2 - 15^2 = 12^2 - 9^2 \Rightarrow BF^2 = 288$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BF^2 = BE.BC$. Từ đó chứng minh được BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF, tức là đường tròn ngoại tiếp tứ giác OECF.

b) Từ câu a suy ra $\widehat{OFM} = \widehat{OCF} = \widehat{OCB}$, mà $\widehat{OFM} = \widehat{OMF}$ nên $\widehat{OCB} = \widehat{OMF}$.

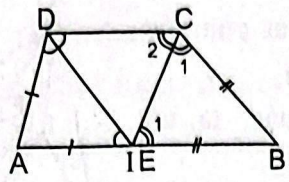
Suy ra BMOC là tứ giác nội tiếp.

181. Gọi I là điểm đồng quy của các tia phân giác các góc C, D và cạnh AB. Lấy điểm E trên AB sao cho $AE = AD$. Thế thì $EB = BC$. Xét hai trường hợp:

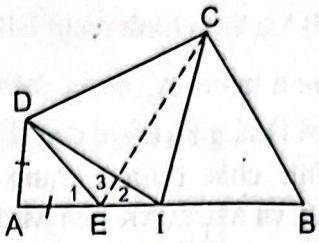
a) E trùng I (h.280). Ta có $\widehat{I_1} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ nên $CD // AB$.

ABCD là hình thang có đáy AB.

Scanned with CamScanner



Hình 280



Hình 281

b) E không trùng I, chẳng hạn E nằm giữa A và I (h.281),

ΔDIC có $\widehat{DIC} = 180^o - \dfrac{\hat{C} + \hat{D}}{2} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$. (1)

ΔADE và ΔBCE cân nên $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \dfrac{180^o - \hat{A}}{2} + \dfrac{180^o - \hat{B}}{2} = 180^o - \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

Suy ra $\hat{E}_3 = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$, (2)

Từ (1), (2) ta có DEIC là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{CDI} = \hat{E}_2$.

Suy ra $\dfrac{\hat{D}}{2} = \dfrac{180^o - \hat{B}}{2}$. Do đó $\hat{B} + \hat{D} = 180^o$. Vậy ABCD là tứ giác nội tiếp.

Kết luận: ABCD là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.

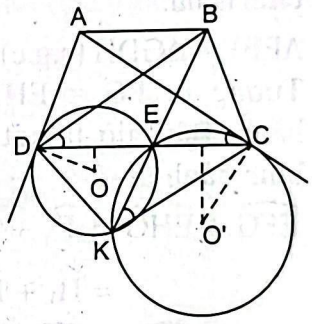
182. (h.282)

a) Chứng minh ABCD và ADKC là các tứ giác nội tiếp.

b) Từ câu a suy ra $\widehat{CKB} = \widehat{CDB}$.

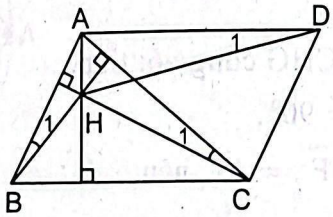
Ta lại có $\widehat{CKE} = \widehat{ECA} = \widehat{CDB}$.

Suy ra $\widehat{CKB} = \widehat{CKE}$, do đó K, E, B thẳng hàng.

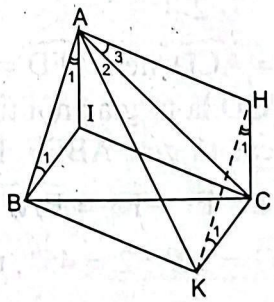


Hình 282

183. a) (h.283) Dễ thấy $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$. Hãy chứng minh AHCD là tứ giác nội tiếp (vì $\widehat{HAD} = \widehat{HAC} = 90^o$) để suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$.



Hình 283



Hình 284

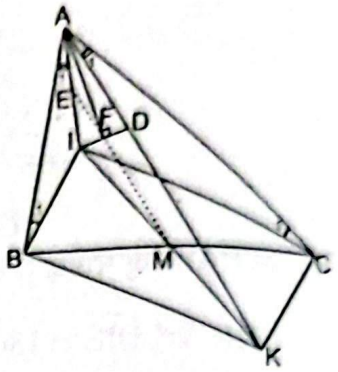
b) (h.284) Vẽ hình bình hành AICH. Ta có $\Delta HCK = \Delta AIB$ (c.c.c) nên $\widehat{K_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \widehat{A_3}$, suy ra AKCH là tứ giác nội tiếp do đó $\widehat{A_2} = \widehat{H_1} = \widehat{A_1}$.

Scanned with CamScanner

184. (h.285) Vẽ hình bình hành BICK.

Theo câu a ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên AF là tia phân giác của góc IAK. Gọi D là giao điểm của IF và AK thì IF = FD.

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, ta có MF // AK và ME // AK nên M, F, E thẳng hàng.



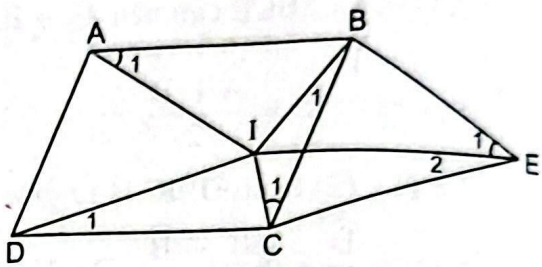
Hình 285

185. (h.286) a) Vẽ hình bình hành IABE.

Ta có $\widehat{C_1} = \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ nên BICE là tứ giác nội tiếp.

Bạn đọc tự giải tiếp.

b) Tổng đó bằng 180°.



Hình 286

186. (h.287) Trước hết chứng minh EFGH là hình bình hành.

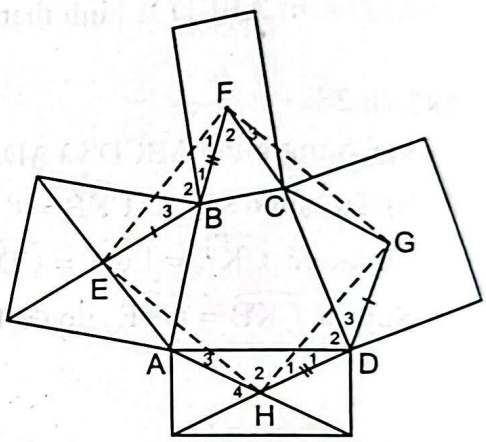
$\Delta EBF = \Delta GDH$ (c.g.c) suy ra EF = GH.

Tương tự FG = EH. Vậy EFGH là hình bình hành. Bây giờ ta xét tổng hai góc đối của hình bình hành đó.

$$\widehat{EFG} + \widehat{EHG} = \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 + \widehat{F}_3 + \widehat{H}_2$$
$$= \widehat{H}_1 + \widehat{H}_4 + \widehat{H}_3 + \widehat{H}_2 = 180^\circ.$$

Suy ra $\widehat{EFG} = \widehat{EHG} = 90^\circ$.

Hình bình hành EFGH là hình chữ nhật.



Hình 287

187. (h.288) Theo tính chất của tâm đường tròn nội tiếp:

$$\widehat{AFD} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ABD},\ \widehat{AGD} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ACD},$$

mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{AFD} = \widehat{AGD}$.

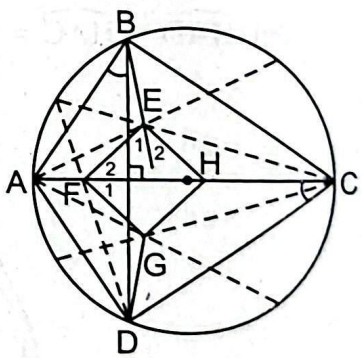
Suy ra AFGD là tứ giác nội tiếp.

Tương tự các tứ giác ABEF, BCHE, DCHG cũng nội tiếp.

Ta có $\widehat{FEH} = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{BAF} + \widehat{BCH} = 90^\circ$,

$\widehat{F}_1 = \widehat{ADG} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, tương tự $\widehat{F}_2 = 45^\circ$ nên

$\widehat{EFG} = 90^\circ$.



Hình 288

Chứng minh tương tự, $\widehat{EHG} = 90^\circ$. Tứ giác EFGH có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, lại có $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ nên là hình vuông.

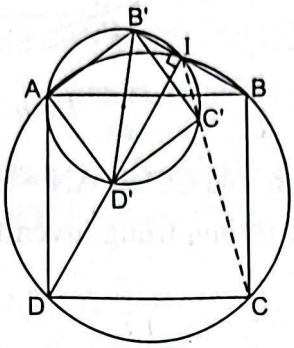
Scanned with CamScanner

188. (h.289) a) $\Delta ADD' = \Delta ABB'$ (c.g.c) nên chứng minh được $DD' \perp BB'$.

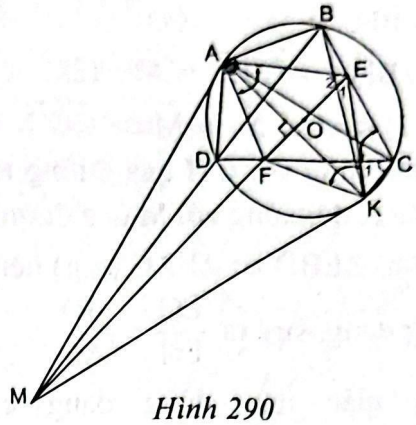
$\widehat{BID} = 90^o$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

$\widehat{B'ID'} = 90^o$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông AB'C'D'.

b) Suy ra từ câu a).



Hình 289



Hình 290

189. (h.290) a) Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$). Các đỉnh A và C lại ở hai phía của EF. Để "lật phía" nhằm sử dụng điều kiện hai góc bằng nhau, ta vẽ K đối xứng với A qua EF. Ta có $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ (đối xứng) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF} \Rightarrow$ ECKF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E}_1$. Ta lại có $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (đối xứng), $\hat{E}_2 = \widehat{DAK}$ (cùng phụ với $\widehat{EAK}$). Suy ra $\hat{C}_1 = \widehat{DAK} \Rightarrow$ ADKC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$.

Vậy EF là đường trung trực của dây AK, suy ra E, O, F thẳng hàng.

b) (hình vẽ ứng với F nằm giữa M và E)

Ta có $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \widehat{DAK}$ (chứng minh trên) $= \widehat{DBK}$, tức là $\widehat{MEK} = \widehat{MBK}$ nên MBEK là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{MKE} + \widehat{MBE} = 180^o \Rightarrow \widehat{MAE} + \widehat{DAC} = 180^o$

$\Rightarrow \left(\widehat{MAD} + 90^o\right) + \widehat{DAC} = 180^o \Rightarrow \widehat{MAD} + \widehat{DAC} = 90^o \Rightarrow \widehat{MAC} = 90^o$.

190. (h.291) a) Do tính đối xứng qua OO' nên $MN \perp OO'$.

b) Năm điểm cùng thuộc đường tròn có đường kính O'M.

c) Năm điểm cùng thuộc đường tròn có đường kính OM.

d) Do tính đối xứng nên $\widehat{O'HD} = \widehat{O'HF}$.

Do câu b ta có $\widehat{O'HB} = \widehat{O'HF}$.

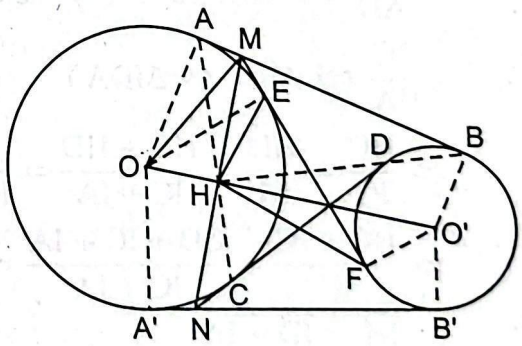
Vậy $\widehat{O'HD} = \widehat{O'HB}$.

Suy ra H, D, B thẳng hàng.

e) Do tính đối xứng $\widehat{CHN} = \widehat{EHM}$.

Do câu c ta có $\widehat{EHM} = \widehat{AHM}$.

Suy ra $\widehat{CHN} = \widehat{AHM}$. Dễ dàng chứng minh A, H, C thẳng hàng.



Hình 291

Scanned with CamScanner

191. (h.292) Kẻ các dây CC', DD' song song với AB.

Do tính đối xứng nên C', B, D' thẳng hàng.

Ta có $\hat{N}_1 = \hat{D}_1 = \widehat{FC'D'}$

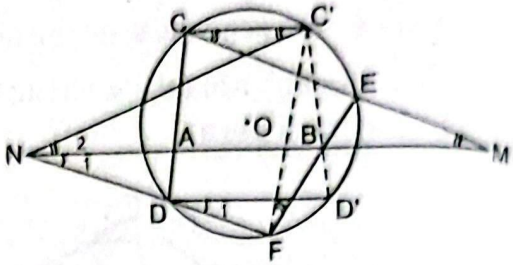
$\Rightarrow$ NFBC' là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \hat{N}_2 = \widehat{BFC'}$. (1)

Ta lại có $\widehat{BFC'} = \widehat{C'CE} = \hat{M}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\hat{N}_2 = \hat{M} \Rightarrow \widehat{CC'N} = \widehat{C'CM}$

$\Rightarrow$ C'N đối xứng với CM qua đường trung trực của CC' $\Rightarrow$ N đối xứng với M qua đường trung trực của CC' $\Rightarrow$ AN = BM.



Hình 292

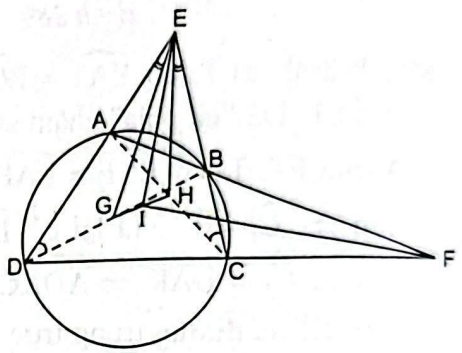
192. (h.293) a) $\Delta EBD \backsim \Delta EAC$ (g.g) nên tỉ số các đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng, suy ra $\dfrac{EG}{EH} = \dfrac{BD}{AC}$. (1)

Hai tam giác trên đồng dạng còn suy ra $\widehat{HEC} = \widehat{GED}$, do đó tia phân giác của góc BED cũng là tia phân giác của góc GEH.

b) ΔGEH có đường phân giác EI chia GH theo tỉ số $\dfrac{EG}{EH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra I chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\dfrac{BD}{AC}$.

Chứng minh tương tự, tia phân giác của góc BFD cũng chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\dfrac{BD}{AC}$ tức là cũng đi qua điểm I.



Hình 293

193. (h.294)

a) $\dfrac{HC}{HD} = \dfrac{FC}{FD}$ (tính chất đường phân giác)

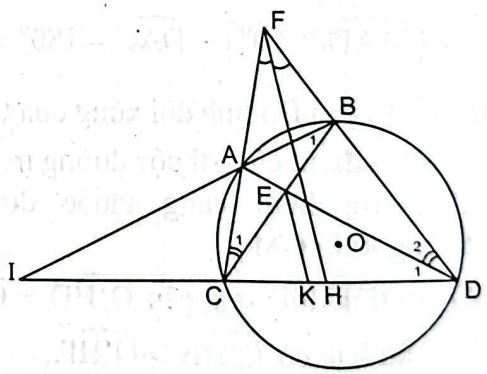
$= \dfrac{BC}{AD}$ (vì $\Delta BCF \backsim \Delta ADF$ (g.g))

$= \dfrac{IC}{IA}$ (vì $\Delta IBC \backsim \Delta IDA$)

$\Rightarrow \dfrac{HC}{IC} = \dfrac{HD}{IA} = \dfrac{HC + HD}{IC + IA} = \dfrac{CD}{IC + IA}$

$\Rightarrow \dfrac{HC + IC}{IC} = \dfrac{CD + IC + IA}{IC + IA} = \dfrac{ID + IA}{IC + IA}$

$\Rightarrow \dfrac{IH}{IC} = \dfrac{ID + IA}{IC + IA}$.



Hình 294

Scanned with CamScanner

b) Tương tự câu a (đổi C thành D, đổi D thành C, đổi F thành E, đổi H thành K) ta có

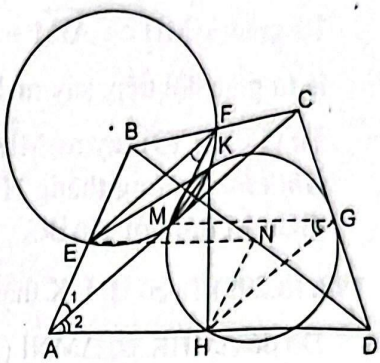
$\frac{IK}{ID} = \frac{IC + IA}{ID + IA}$.

c) Từ các câu a và b suy ra

$\frac{IH}{IC} \cdot \frac{IK}{ID} = \frac{ID + IA}{IC + IA} \cdot \frac{IC + IA}{ID + IA} = 1 \Rightarrow IH \cdot IK = IC \cdot ID$.

Ta lại có $IC \cdot ID = IA \cdot IB$ nên $IH \cdot IK = IA \cdot IB$, do đó ABHK là tứ giác nội tiếp.

194. (h.295) Gọi E, F, G, H, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Vẽ đường tròn ngoại tiếp các tam giác EMF và MHG, chúng cắt nhau ở K. Ta sẽ chứng minh rằng EHNK, FGNK là các tứ giác nội tiếp.



Hình 295

Ta có $\overset{\frown}{EKM} = \overset{\frown}{EFM} = \hat{A}_1$, $\overset{\frown}{MKH} = \overset{\frown}{MGH} = \hat{A}_2$,

suy ra $\overset{\frown}{EKM} + \overset{\frown}{MKH} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$,

tức là $\overset{\frown}{EKH} = \hat{A}$. (1)

Ta lại có $\overset{\frown}{ENH} = \hat{A}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{EKH} = \overset{\frown}{ENH}$, do đó EHNK là tứ giác nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔEHN đi qua K.

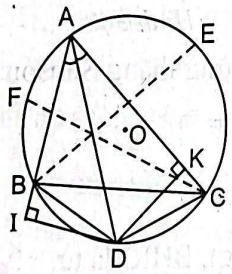
Chứng minh tương tự, đường tròn ngoại tiếp ΔFGN cũng đi qua K.

195. (h.296) a) Kẻ $DI \perp AB$, $DK \perp AC$. Hãy chứng minh $BI = CK$, từ đó

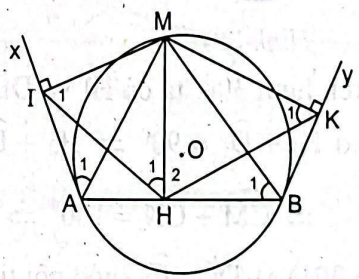
$$AB + AC = AI + AK < 2AD.$$

b) Cộng từng vế các bất đẳng thức:

$AD > \frac{AB + AC}{2}$, $BE > \frac{AB + BC}{2}$, $CF > \frac{AC + BC}{2}$.



Hình 296



Hình 297

196. (h.297 ứng với M thuộc cung lớn AB)

a) Từ các tứ giác nội tiếp, ta có $\hat{H}_1 = \hat{A}_1$, $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$ mà $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ nên $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$.

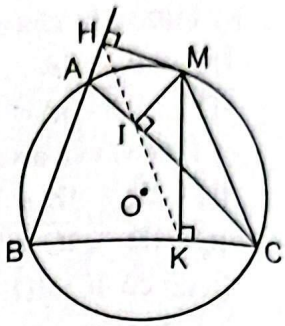
Tương tự $\hat{H}_2 = \hat{I}_1$.

$\Delta MHI \backsim \Delta MKH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MH}{MK} = \frac{MI}{MH} \Rightarrow MH^2 = MI.MK$.

b) $MI + MK \geq 2\sqrt{MI.MK} = 2MH$.

Scanned with CamScanner

197. Xét ΔABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kì thuộc đường tròn, $MH \perp AB$, $MI \perp AC$, $MK \perp BC$ (h.298).



Hình 298

Tứ giác MIKC có $\widehat{MIC} = \widehat{MKC} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MIK} + \widehat{MCB} = 180^\circ$. (1)

ABCM là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{MCB} = \widehat{MAH}$ (cùng bù với $\widehat{MAB}$). (2)

Tứ giác AIMH có $\widehat{AIM} + \widehat{AHM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MAH} = \widehat{MIH}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MIK} + \widehat{MIH} = 180^\circ$. Vậy ba điểm H, I, K thẳng hàng.

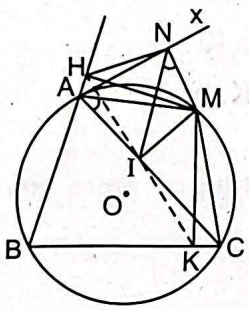
Ghi chú. Đường thẳng HIK trong bài tập trên được gọi là đường thẳng Simson của điểm M đối với ΔABC.

198. (h.299) Ta có H, I, K thẳng hàng, $\widehat{MNI} = \widehat{MHI}$, $\widehat{MKI} = \widehat{MCI} = \widehat{MAN} = \widehat{MIN}$.

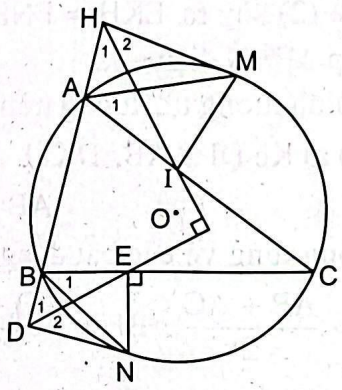
Do đó $\Delta MHK \backsim \Delta MNI$ (g.g). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách khác (không đòi hỏi chứng minh H, I, K thẳng hàng): Chứng minh

$\Delta MHK \backsim \Delta MNI$ (g.g)



Hình 299



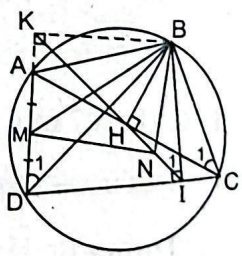
Hình 300

199. Trên hình 300, ta có HI và DE theo thứ tự là các đường thẳng Simson của M và N.

Ta có $\widehat{H}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H}_2 + \widehat{D}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CM} + \widehat{CN} = 180^\circ \Rightarrow$ MN là đường kính.

200. (h.301) a) $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung), BHIC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{I}_1 = \widehat{C}_1$.



Hình 301

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{I}_1$. Tương tự $\widehat{ABD} = \widehat{HBI}$.

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta HBI$ (g.g).

b) Kẻ $BK \perp AD$. Ta thấy I, H, K thuộc cùng một đường thẳng (đường thẳng Simson).

$\Delta ABD \backsim \Delta HBI$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BNH} \Rightarrow$ BKMN là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc). Ta lại có $\widehat{BKM} = 90^\circ$ nên $\widehat{BNM} = 90^\circ$.

Scanned with CamScanner

Chú ý. Cách giải câu b không dùng đến đường thẳng Simson: ΔABD và ΔHBI đồng dạng, có BM và BN là các đường trung tuyến tương ứng nên

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BH}. \qquad (1)$$

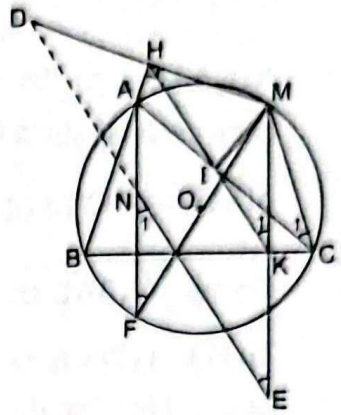
Ta lại có $\widehat{ABM} = \widehat{HBN}$ (cặp góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng) nên

$$\widehat{ABH} = \widehat{MBN}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABH \backsim \Delta MBN$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AHB} = \widehat{MNB}$.

Ta lại có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $\widehat{MNB} = 90^\circ$.



Hình 302

201. (h.302) Gọi N là trực tâm của ΔABC, AN cắt (O) ở F. Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC. Theo đường thẳng Simson, ba điểm H, I, K thẳng hàng.

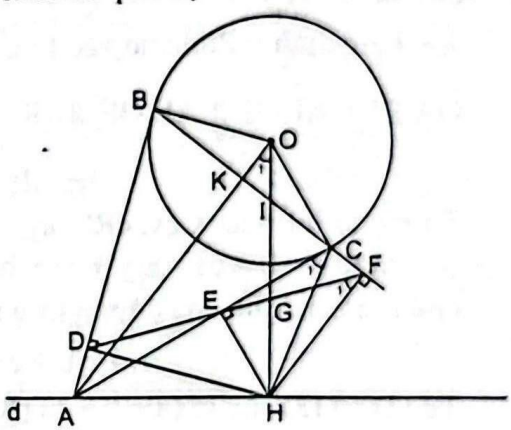
Lần lượt chứng minh $\widehat{K_1} = \widehat{C_1} = \widehat{F} = \widehat{N_1} = \widehat{E}$

để suy ra NE // HK. Tương tự ND // HK. Vậy DE luôn đi qua trực tâm N của ΔABC.

202. (h.303)

a) Gọi I, K là giao điểm của BC với OH, OA. Gọi R là bán kính của (O). Tứ giác AKIH nội tiếp nên $OI \cdot OH = OK \cdot OA = OB^2 = R^2$ nên BC đi qua điểm I cố định.

b) Năm điểm O, B, A, H, C thuộc cùng một đường tròn. Xét điểm H và ΔABC. Kẻ $HF \perp BC$. Ta có DEF là đường thẳng Simson của điểm H, gọi G là giao điểm của đường thẳng DEF với OH. Ta có



Hình 303

$\widehat{GHF} = \widehat{O_1}$ (do OA // HF)

$= \widehat{C_1}$ (tứ giác OAHC nội tiếp) $= \widehat{F_1}$ (tứ giác CEHF nội tiếp) $\Rightarrow GF = GH$.

Từ đó GF = GI. Vậy GH = GI.

Đường thẳng DE đi qua điểm cố định G là trung điểm IH.

203. (h.304) a) Xét (O) có

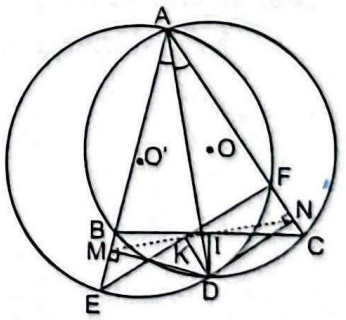
$\widehat{DB} = \widehat{DC} \Rightarrow DB = DC \Rightarrow DI \perp BC$.

Tương tự, xét (O') có $DK \perp EF$.

b) Xét ΔABC và $D \in (O)$ có MIN là đường thẳng Simson.

Xét ΔAEF và $D \in (O')$ có MKN là đường thẳng Simson.

Suy ra M, K, I, N thẳng hàng.



Hình 304

Scanned with CamScanner

c) $\Delta ADM = \Delta ADN \Rightarrow AM = AN$.

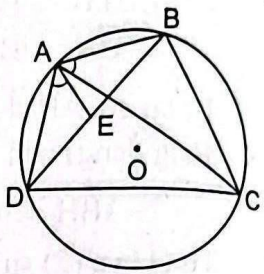
ΔAMN cân có AD là phân giác $\widehat{A}$ nên $AD \perp MN$.

Vậy $AD \perp IK$.

204. (h.305) Gọi ABCD là tứ giác nội tiếp, cần chứng minh

$$AC.BD = AD.BC + AB.CD.$$

Xét ΔABC, ta tạo ra một tam giác mới đồng dạng với ΔABC bằng cách lấy điểm E trên đường chéo BD sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$.



Hình 305

$\Delta DAE \backsim \Delta CAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DE.$ (1)

Tương tự $\Delta BAE \backsim \Delta CAD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB.CD = AC.BE.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD.BC + AB.CD = AC.DE + AC.BE = AC(DE + BE) = AC.BD$.

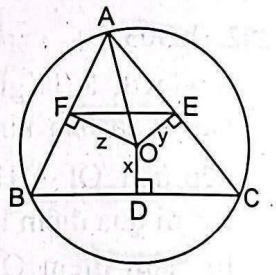
Lưu ý. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $ac + bd \geq 2\sqrt{abcd}$ nên từ định lí Ptoleme ta còn suy ra $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq 2\sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$.

205. (h.306) Xét ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi OD, OE, OF theo thứ tự là các khoảng cách từ O đến BC, AC, AB. Đặt BC = a, AC = b, AB = c, OD = x, OE = y, OF = z.

Áp dụng định lí Ptoleme vào tứ giác nội tiếp AEOF, ta có

$$OA.EF = AF.OE + AE.OF \Rightarrow R.\frac{a}{2} = \frac{c}{2}.y + \frac{b}{2}.z$$

$$\Rightarrow aR = cy + bz.$$



Hình 306

Tương tự $bR = az + cx$, $cR = ay + bx$.

Suy ra $R(a + b + c) = a(y + z) + b(x + z) + c(x + y)$. (1)

Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có

$$r(a + b + c) = 2S_{ABC} = ax + by + cz. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(a + b + c)(R + r) = a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z)$ nên $(a + b + c)(R + r) = (a + b + c)(x + y + z)$.

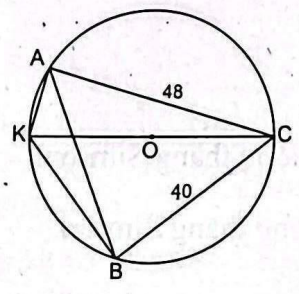
Do đó $R + r = x + y + z$.

Chú ý: Theo Ví dụ 8d, ta có $R \geq 2r$ nên từ định lí Carnot, ta còn suy ra

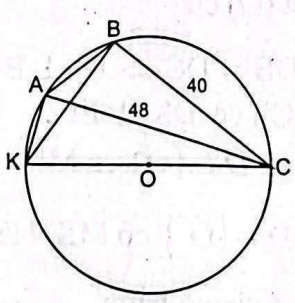
$$OD + OE + OF \geq 3r.$$

206. (h.307) Vẽ đường kính CK. Ta tính được CK = 50 cm, KA = 14 cm, KB = 30 cm.

Xét hai trường hợp:



a)



b)

Hình 307

Scanned with CamScanner

- A và B nằm khác phía đối với CK (h.307a).

Theo định lí Ptoleme: $AB \cdot CK = AK \cdot BC + AC \cdot BK$

$\Rightarrow AB \cdot 50 = 14 \cdot 40 + 48 \cdot 30 \Rightarrow AB = 40\,(cm)$.

- A và B nằm cùng phía đối với CK (h.307b).

Theo định lí Ptoleme: $KB \cdot AC = AK \cdot BC + AB \cdot CK$

$\Rightarrow 30 \cdot 48 = 14 \cdot 40 + AB \cdot 50 \Rightarrow AB = 17,6\,(cm)$.

207. (h.308)

a) AI cắt BC ở D, cắt (O) ở E.

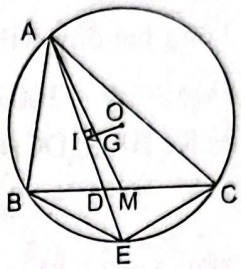
Gọi M là trung điểm BC. Ta chứng minh được EB = EI.

Đặt EC = EB = EI = IA = k.

Theo định lí Ptoleme:

$EC \cdot AB + EB \cdot AC = BC \cdot AE$

$\Rightarrow k(AB + AC) = BC \cdot 2k \Rightarrow AB + AC = 2BC$.



Hình 308

b) Theo tính chất đường phân giác: $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = 2$.

Ta lại có $\frac{AG}{GM} = 2$ nên IG // BC.

208. (hình 309 ứng với M là giao điểm của các tia AB và DC, N là giao điểm của các tia DA và CB).

Gọi K là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác NAB, MBC.

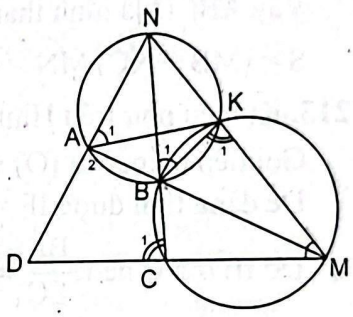
Tứ giác ABKN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

Tứ giác BCMK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{CMK}$

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{CMK}$ nên tứ giác ADMK nội tiếp, K thuộc đường tròn (ADM).

Tương tự K thuộc đường tròn (CDN).

Vậy bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAD, MBC, NAB, NCD cùng đi qua K.



Hình 309

209. (vẫn dùng Hình 309) Tứ giác BCMK nội tiếp nên $\widehat{K_1} = \widehat{C_1}$.

Tứ giác ABKN nội tiếp nên $\widehat{NKB} = \widehat{A_2}$.

Suy ra $\widehat{K_1} + \widehat{NKB} = \widehat{C_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$ (do ABCD là tứ giác nội tiếp).

Vậy K thuộc đoạn thẳng MN.

210. (h.310) Gọi K là giao điểm của IB và đường tròn (DMN).

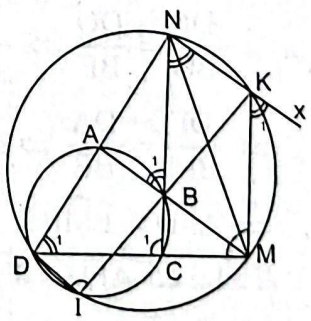
Ta có $\widehat{DMK} = \hat{I} = \widehat{C_1}$ nên NC // KM. (1)

NC // KM $\Rightarrow \widehat{BNK} = \widehat{K_1} = \widehat{D_1} = \widehat{B_1}$

$\Rightarrow$ NK // AM. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BNKM là hình bình hành.

Do đó IB đi qua trung điểm của MN.



Hình 310

Scanned with CamScanner

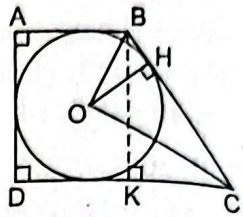
§5. Tứ giác ngoại tiếp

211. (h.311) a) Tính BC, được $10\sqrt{5}$.

Do đó $OH = \dfrac{OB.OC}{BC} = 4\sqrt{5}$.

Tổng hai đáy $AB + CD = AD + BC = 8\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$.

Đáp số: $S = 360\ cm^2$.



Hình 311

b) Kẻ $BK \perp DC$, đặt $BK = h$. Ta có

$$KC = a - b,\ BC^2 = BK^2 + KC^2$$

nên $(a + b - h)^2 = h^2 + (a - b)^2$. Từ đó $h = \dfrac{2ab}{a + b}$, $S = ab$.

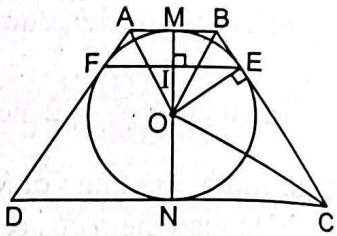
212. (h.312) $OE^2 = BE.EC = 1.4 \Rightarrow OE = 2$ (cm).

Gọi tiếp điểm của (O) với AB là M. Dễ dàng tính được $BM = BE = 1$cm nên M là trung điểm của AB.

Do đó ΔAOB cân, suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ và $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$.

Vậy ABCD là hình thang cân,

$S = (MB + NC).MN = BC.MN = 5.4 = 20\ (cm^2)$.



Hình 312

213. Kí hiệu như trên Hình 312.

Gọi tiếp điểm của (O) với AB, CD là M, N. Gọi I là giao điểm của MN và EF.

Dễ dàng tính được IF = 8cm, OI = 6cm nên MI = 4cm.

Do IE // NC nên $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{MI}{IN} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$. (1)

Ta lại có $BE.EC = OE^2 = 100$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BE = 5cm, EC = 20cm.

Từ đó AB = 10cm, CD = 40cm, AD = BC = 25cm.

214. (h.313) a) Dễ dàng chứng minh $\widehat{EOF} = 45°$.

Ta lại có $\widehat{D}_1 = 45°$. Do đó $\Delta OFE \backsim \Delta DFO$ (g.g).

Tương tự $\Delta OFE \backsim \Delta BOE$ (g.g). Suy ra $\Delta DFO \backsim \Delta BOE$.

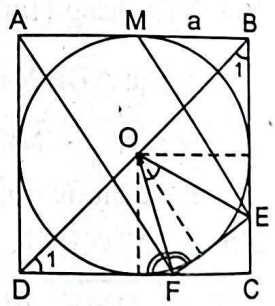
b) Đặt BM = a. Từ câu a suy ra

$$\frac{DF}{BO} = \frac{DO}{BE} \Rightarrow \frac{DF}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{BE} \Rightarrow \frac{DF}{a} = \frac{2a}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{BM} = \frac{DA}{BE} \Rightarrow \Delta DAF \backsim \Delta BEM\ (c.g.c)$$

$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{EMB}$.

Ta lại có $\widehat{AFD} = \widehat{FAB}$ nên $\widehat{EMB} = \widehat{FAB}$, suy ra ME // AF.



Hình 313

Scanned with CamScanner

215. (h.314) Gọi tiếp điểm trên AC của các đường tròn nội tiếp ΔABC và ΔADC là M và N. Ta có:

$$2CM = AC + BC - AB$$

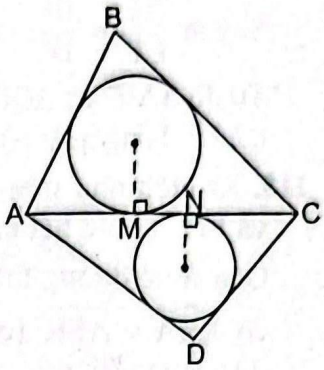
$$2CN = AC + CD - AD.$$

Suy ra $2(CM - CN) = (BC + AD) - (AB + CD)$.

Theo đề bài $M \equiv N \Rightarrow BC + AD = AB + CD$

$\Rightarrow$ ABCD là tứ giác ngoại tiếp.

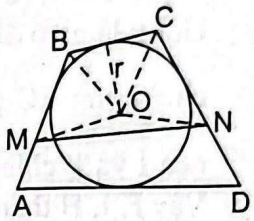
Gọi M', N' là tiếp điểm trên BD của các đường tròn nội tiếp ΔBAD và ΔBCD. Chứng minh tương tự ta được $M' \equiv N'$. Suy ra điều phải chứng minh.



Hình 314

216. (h.315) Gọi (O; r) là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD, S là diện tích tứ giác, p là nửa chu vi. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh của tứ giác và chia tứ giác ra hai phần có chu vi bằng nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh CD (chú ý rằng không nhất thiết M và N thuộc hai cạnh đối của tứ giác), giả sử O nằm trong tứ giác hoặc nằm trên cạnh của tứ giác BMNC. Ta có:



Hình 315

$$S_{BMNC} = S_{MOB} + S_{BOC} + S_{CON} + S_{MON} = \frac{1}{2}r(MB + BC + CN) + S_{MON}$$

$$= \frac{pr}{2} + S_{MON}; \qquad (1)$$

$$S_{AMND} = S_{MOA} + S_{AOD} + S_{DON} - S_{MON} = \frac{1}{2}r(MA + AD + DN) - S_{MON}$$

$$= \frac{pr}{2} - S_{MON}. \qquad (2)$$

Do $S_{BMNC} = S_{AMND}$ nên từ (1) và (2) suy ra $S_{MON} = 0$.

Vậy đường thẳng MN đi qua O.

Chú ý

a) Có thể không chứng minh đẳng thức (2) mà nhận xét rằng công thức $S = pr$ đúng với tứ giác ngoại tiếp, do đó $\frac{S}{2} = \frac{pr}{2}$, nên từ (1) suy ra $S_{MON} = 0$.

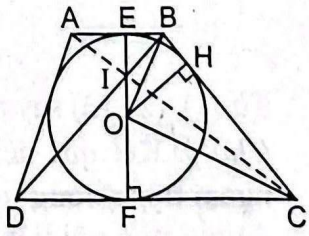
b) Bài toán trên vẫn đúng nếu thay "tứ giác ngoại tiếp" bởi "đa giác ngoại tiếp".

217. (h.316) Gọi H là tiếp điểm của BC và đường tròn (O; r). Ta có BE = BH, CF = CH, $\widehat{BOC} = 90^\circ$ nên $BE.CF = BH.CH = r^2$.

Tương tự $AE.DF = r^2$. Suy ra $BE.CF = AE.DF$, do đó

$$\frac{BE}{DF} = \frac{AE}{CF}.$$

Gọi I là giao điểm của BD và EF. Ta có $\frac{BE}{DF} = \frac{IE}{IF}$.



Hình 316

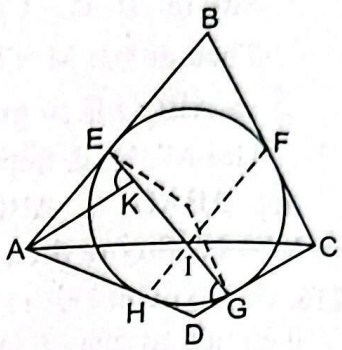
Scanned with CamScanner

Suy ra $\frac{AE}{CF} = \frac{IE}{IF}$.

Từ đó $\Delta AIE \backsim \Delta CIF$ (c.g.c), dễ dàng chứng minh A, I, C thẳng hàng.

Chú ý. Tổng quát bài toán này, xem Bài tập 218.

218. Kí hiệu như trên hình 317. Gọi I là giao điểm của AC và EG. Trước hết ta chứng minh F, I, H thẳng hàng.



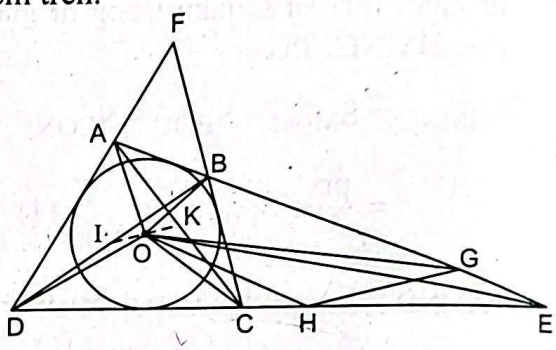
Hình 317

Qua A vẽ đường thẳng song song với CD, cắt EG ở K. Ta có $\widehat{EKA} = \widehat{AEK}$ (cùng bằng $\widehat{EGD}$) nên AE = AK. Do đó $\frac{IA}{IC} = \frac{AK}{CG} = \frac{AE}{CG}$ tức là I chia trong AC theo tỉ số $\frac{AE}{CG}$.

Gọi I' là giao điểm của AC và FH. Chứng minh tương tự, I' chia trong AC theo tỉ số $\frac{AH}{CF}$. Nhưng AE = AH, CG = CF nên I và I' chia trong AC theo cùng một tỉ số, do đó I ≡ I'.

Vậy F, I, H thẳng hàng, do đó AC đi qua giao điểm của EG và FH. Chứng minh tương tự, BD cũng đi qua giao điểm trên.

219. (h.318) a) Gọi r là bán kính của đường tròn (O), S là diện tích tứ giác ABCD.



Hình 318

Ta có $S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{r}{2}(AB + CD)$

$S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{r}{2}(AD + BC)$

Do AB + CD = AD + BC

nên $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{1}{2}S$.

b) Giả sử các tia AB và DC cắt nhau tại E (trường hợp AB // CD, bạn đọc tự chứng minh). "Dồn" các đoạn thẳng AB và CD về phía E: lấy G trên tia EA, lấy H trên tia ED sao cho EG = AB, EH = CD.

Ta có $S_{OEG} + S_{OEH} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S$ nên $S_{OHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}$. (1)

Dễ thấy các điểm I và K cũng có tính chất $S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S$, $S_{KAB} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$,

nên tương tự như trên ta cũng có $S_{IHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}$, (2)

$S_{KHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{OHG} = S_{IHG} = S_{KHG}$ do đó ba điểm I, O, K thẳng hàng.

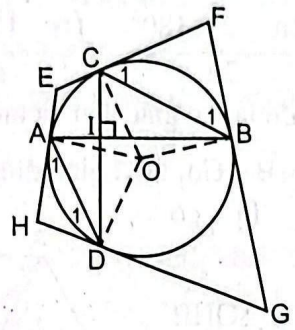
Chú ý. Kết quả nêu ở câu b là nội dung của định lí Newton: Trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các trung điểm của hai đường chéo thẳng hàng với tâm của đường tròn nội tiếp.

Scanned with CamScanner

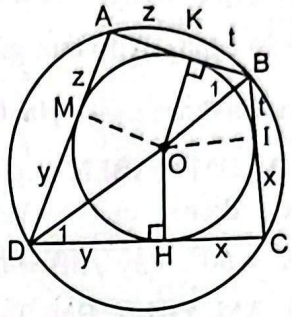
220. (h.319) Trước hết chứng minh $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = 180^\circ$. Suy ra

$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$,

do đó $\hat{F} + \hat{H} = 180^\circ$. Vậy EFGH là tứ giác nội tiếp.



Hình 319



Hình 320

221. (h.320) Gọi I, K, M là tiếp điểm của đường tròn (O) trên BC, AB, AD, r là bán kính của đường tròn (O).

Đặt CH = CI = x, DH = DM = y, BI = BK = t, AK = AM = z.

Ta tính được AD = 22 cm.

ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\hat{B}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$, từ đó $\hat{B}_1 = \widehat{HOD}$.

Ta có $\Delta EBO \backsim \Delta HOD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{t}{r} = \dfrac{r}{y} \Rightarrow r^2 = yt$.

Tương tự $r^2 = xz$. Suy ra $xz = yt$.

Do đó $\dfrac{x}{y} = \dfrac{t}{z} = \dfrac{18 - x}{22 - y}$. Từ đó ta được $11x = 9y$.

Ta lại có $x + y = 26$, tính được $x = 11{,}7$; $y = 14{,}3$.

Đáp số. HC = 11,7 cm, HD = 14,3 cm.

222. (h.321) a) Kí hiệu như trên hình vẽ.

Chứng minh $r^2 = xz = yt$ như ở Bài tập 221.

b) Gọi S là diện tích tứ giác ABCD, p là nửa chu vi.

Ta có

$S = pr = (a + c)r$ (vì $a + c = b + d$) nên $S^2 = (a + c)^2 r^2$.

Mặt khác,

$abcd = (z + t)(t + x)(x + y)(y + z)$

$= (zt + xz + t^2 + xt)(xy + xz + y^2 + yz)$

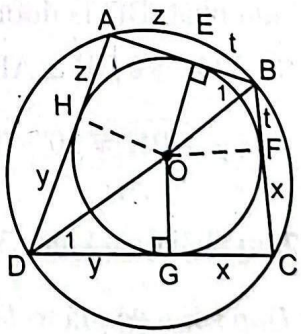
$= (zt + yt + t^2 + xt)(xy + yt + y^2 + yz)$ (do $xz = yt$)

$= t(z + y + t + x)y(x + t + y + z)$

$= yt(x + y + z + t)^2$

$= r^2(c + a)^2$ do $r^2 = yt$.

Do đó $S^2 = abcd$, vậy $S = \sqrt{abcd}$.



Hình 321

Scanned with CamScanner

§6. Đa giác đều

223. Đa giác II có n cạnh, số đo mỗi góc là $y = \dfrac{(n-2)\cdot 180^o}{n}$.

Đa giác I có 2n cạnh, số đo mỗi góc là $x = \dfrac{(2n-2)\cdot 180^o}{2n} = \dfrac{(n-1)\cdot 180^o}{n}$.

Từ $y = 2x$, ta tìm được $n = 3$. Hai đa giác đều đó là lục giác đều và tam giác đều.

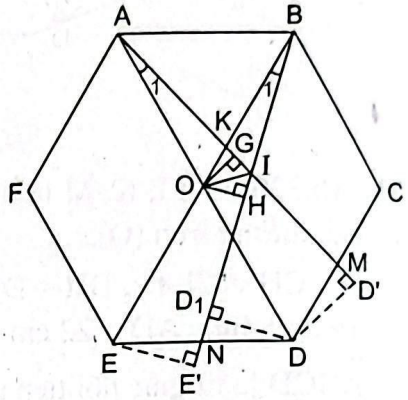
224. (h.322) a) $\Delta ADM = \Delta BEN$ (c.g.c) nên $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Gọi O là giao điểm của AD và BE, K là giao điểm của AM và BE. Ta có $\overset{\frown}{BIK} = \overset{\frown}{AOK} = 60^o$. Vậy $\overset{\frown}{AIB} = 60^o$.

b) Vẽ $OG \perp AM$, $OH \perp BN$. Ta có $\Delta OGA = \Delta OHB$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên OG = OH, suy ra IO là tia phân giác của góc AIN. (1)

Vẽ $EE' \perp BN$, $DD' \perp AM$, $DD_1 \perp BN$.

Ta có EE' = DD' (bằng hai lần các đoạn thẳng bằng nhau OH, OG), mà $EE' = DD_1$ nên $DD_1 = DD'$, suy ra ID là tia phân giác của góc MIN. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{OID} = 90^o$.

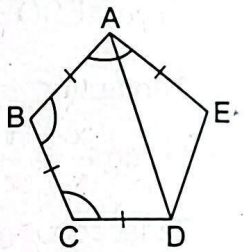


Hình 322

225. (h.323) Trước hết, xét tứ giác ABCD, ta có $\widehat{B} = \widehat{C}$, AB = CD nên ABCD là hình thang cân (bạn đọc tự chứng minh), suy ra $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{CDA}$, do đó $\overset{\frown}{BAE} = \overset{\frown}{CDE}$ (tức là $\widehat{A} = \widehat{D}$).

Chứng minh tương tự đối với tứ giác ABCE, ta được $\widehat{C} = \widehat{E}$.

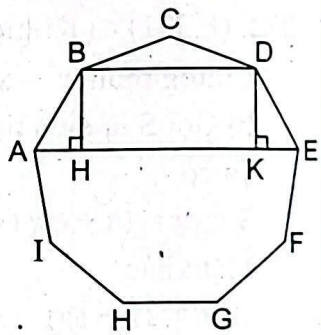
Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$.



Hình 323

226. Gọi ABCDEFGHI là đa giác đều 9 cạnh, AE là đường chéo lớn nhất, BD là đường chéo nhỏ nhất, ABDE là hình thang cân (h.324). Vẽ $BH \perp AE$, $DK \perp AE$, $\overset{\frown}{ABC} = 140^o$ nên

$\overset{\frown}{ABH} = 30^o$. Ta có $AH = \dfrac{AB}{2}$ nên $AE - BD = AB$.



Hình 324

227. a) Giải điều kiện: $360 : \dfrac{(n-2)180}{n}$.

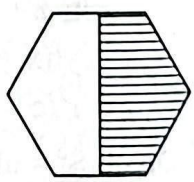
Đáp số: n có giá trị là 6, 4, 3.

b) Có, chẳng hạn ngũ giác là nửa của lục giác đều (xem h.325).

c) $\dfrac{(n-2)180}{n}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 180 - \dfrac{360}{n}$ là số tự nhiên $\Rightarrow 360 : n$.

Phân tích 360 ra thừa số nguyên tố: $360 = 2^3.3^2.5$.


Hình 325

Scanned with CamScanner

Số 360 có 24 ước tự nhiên. Do $n \geq 3$ nên ta loại các số 1 và 2, còn lại 22 ước.
Vậy câu trả lời B là đúng.

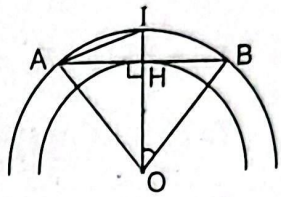
§7. Đa giác đều nội tiếp, ngoại tiếp

228. (h.326) Gọi AB là cạnh của đa giác đều.

a) Diện tích hình vành khăn bằng $\frac{\pi a^2}{4}$.

b) Chiều rộng hình vành khăn bằng $HI = AH \tan \widehat{IAH}$.

Đáp số: $\frac{a}{2}\tan\frac{90^\circ}{n}$.

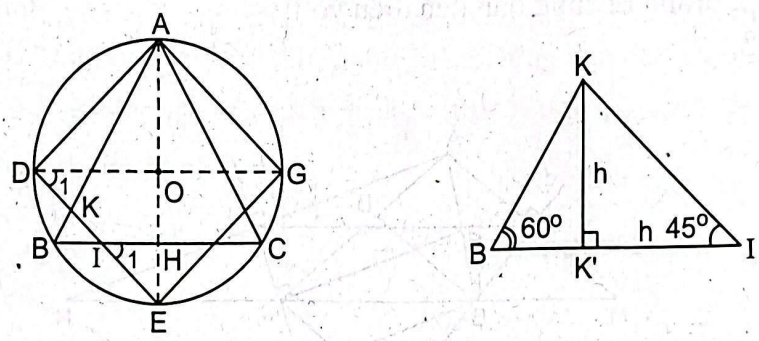


Hình 326

229. (h.327) Gọi H, I là giao điểm của OE, DE với BC.

Ta có $OH = HE = \frac{R}{2}$, $\hat{I}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ$

nên $IH = HE = \frac{R}{2}$, $BI = BH - IH = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$.



a) b)

Hình 327

Trước hết tính diện tích ΔKBI (h.327b).

Gọi đường cao KK' = h. Ta có BK' + K'I = BI nên $\frac{h}{\sqrt{3}} + h = \frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Từ đó tính được $h = \frac{R\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1)^2$, $S_{KBI} = \frac{R^2}{8}(9-5\sqrt{3})$, cuối cùng diện tích phải tìm bằng:

$$S_{ABC} - 2S_{KBI} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{4}(9-5\sqrt{3}) = \frac{R^2}{4}(8\sqrt{3}-9).$$

Scanned with CamScanner

230. (h.328) a) ΔCEK có CE = CK nên là tam giác cân, suy ra

$\hat{E}_2 = \hat{K}_2 = \dfrac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$.

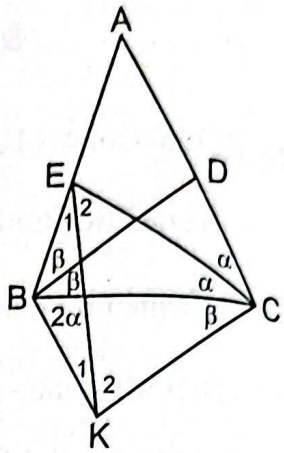
Ta có $\widehat{BEC} = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ nên

$\hat{E}_1 = \widehat{BEC} - \hat{E}_2 = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{3\beta}{2}$.

Ta có $\widehat{BKC} = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ nên

$\hat{K}_1 = \widehat{BKC} - \hat{K}_2 = 90^\circ - \dfrac{3\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$.

b) $\hat{E}_1 = \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right) - \beta$; $\hat{K}_1 = \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right) - \alpha$.



Hình 328

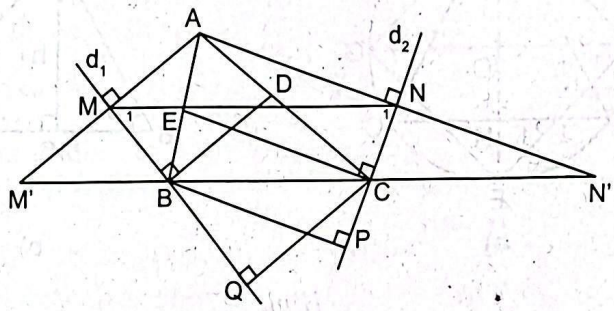
Nếu $\alpha < \beta$ thì $\hat{E}_1 < \hat{K}_1$ nên BK < BE (1)

Mặt khác, ΔECB và ΔDBC có cạnh BC chung, CE = BD, $\widehat{ECB} < \widehat{DBC}$ nên BE < CD = BK, mâu thuẫn với (1).

Nếu $\alpha > \beta$, tương tự cũng dẫn đến điều vô lí.

Vậy $\alpha = \beta$.

231. (h.329)



Hình 329

a) Gọi M', N' theo thứ tự là giao điểm của AM, AN với BC. Dễ thấy MN là đường trung bình của ΔAM'N' nên MN // BC.

b) BCPQ là tứ giác nội tiếp, mà MN // BC nên dễ dàng chứng minh được MNPQ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có BD ⊥ MQ nên $BD.MQ = 2S_{ABC}$.

Tương tự $CE.NP = 2S_{ABC}$, suy ra BD.MQ = CE.NP.

d) Nếu BD = CE thì từ câu c suy ra MQ = NP.

Tứ giác nội tiếp MNPQ có MQ = NP nên MN // PQ và MNPQ là hình thang cân (bạn đọc tự chứng minh), suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$.

Do đó $\widehat{CBQ} = \widehat{BCP}$ (do MN // BC).

Từ đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Vậy ΔABC cân tại A.

Scanned with CamScanner

232. (h.330)

a) $\Delta NBD = \Delta AEC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \overset{\frown}{BND} = \overset{\frown}{EAC} \Rightarrow$ ANBD là tứ giác nội tiếp.

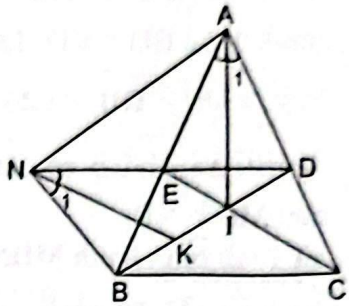
b) AI là tia phân giác của góc BAC, dễ thấy $\hat{A}_1 = \hat{N}_1$.

Ta có

$\overset{\frown}{AIK} + \overset{\frown}{ANK} = (\hat{A}_1 + \overset{\frown}{ADI}) + (\overset{\frown}{ANB} - \hat{N}_1)$

$= \overset{\frown}{ADI} + \overset{\frown}{ANB} = 180^o$ (vì ANBD là tứ giác nội tiếp).

Do đó ANKI là tứ giác nội tiếp.



Hình 330

c) $\Delta NBD = \Delta AEC$ (câu a) nên các đường phân giác tương ứng NK, AI bằng nhau.

Tứ giác nội tiếp ANKI có NK = AI nên dễ dàng chứng minh được AN // IK.

Suy ra AN // BD.

Hình thang ANBD lại là tứ giác nội tiếp (câu a) nên là hình thang cân.

d) ANBD là hình thang cân nên ND = AB.

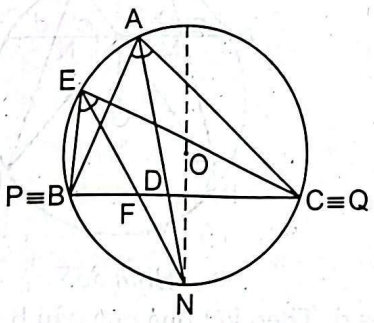
Ta lại có ND = AC (giả thiết) nên AB = AC. Vậy ΔABC cân tại A.

233. (h.331) Đặt các tam giác ABC và EPQ như hướng dẫn.

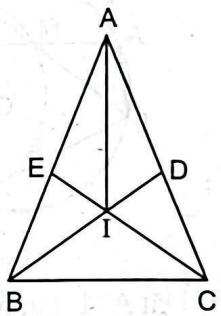
Do $\overset{\frown}{BEC} = \overset{\frown}{BAC}$ nên bốn điểm B, E, A, C thuộc cùng một đường tròn.

Gọi N là điểm chính giữa của cung BC, các đường thẳng AD, EF đều đi qua N. Ta sẽ chứng minh rằng E trùng A. Giả sử E không trùng A. Không mất tính tổng quát, giả sử $E \in \overset{\frown}{AB}$. Thế thì $\overset{\frown}{NE} < \overset{\frown}{NA}$ nên NE < NA. Ta lại có EF = AD nên NF < ND, vô lí.

Vậy E trùng A, tức là $\Delta ABC = \Delta EPQ$.



Hình 331



Hình 332

Chú ý

a) Bài tập 233 là một bài toán thi học sinh giỏi Toán toàn quốc năm 1979.

b) Từ kết quả của Bài tập 233, ta có một cách giải cho bài toán "Tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân".

Thật vậy, xét ΔABC có các đường phân giác BD và CE bằng nhau, chúng cắt nhau tại I (h.332). Ta có AI là tia phân giác của góc A. ΔABD và ΔACE có BD = CE, $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{CAE}$, AI là đường phân giác chung của hai tam giác nên

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (theo Bài tập 233).

Suy ra AB = AC. Vậy ΔABC là tam giác cân.

Scanned with CamScanner

234. *Cách 1.* (h.333) Giả sử AB < AC. Trên cạnh AC lấy K sao cho AK = AB, ta chứng minh được BD = KD. Ta cũng chứng minh được $\hat{K}_1 > \hat{C}_2$ nên DC > DK.

Suy ra DC > DB, do đó $\hat{B}_1 > \hat{C}_1$.

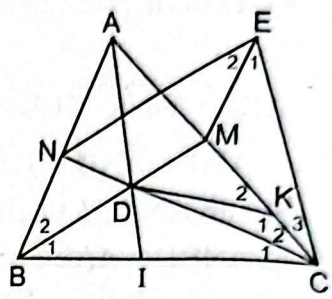
ΔMBC và ΔNCB có cạnh BC chung, BM = CN, $\hat{B}_1 > \hat{C}_1$ nên MC > NB.

Vẽ hình bình hành MBNE, ta có MC > NB = ME nên $\hat{E}_1 > \hat{C}_3$. Ta lại có $\hat{E}_2 = \hat{B}_2 = \hat{K}_2 > \hat{C}_2$ nên $\widehat{NEC} > \widehat{NCE}$, suy ra CN > EN.

Do đó CN > BM, trái với giả thiết.

Giả sử AB > AC cũng dẫn đến điều trái với giả thiết.

Vậy AB = AC.



Hình 333

Cách 2. Sử dụng kết quả của Bài tập 233.

Chú ý: Bài tập 234 tổng quát hơn so với Ví dụ 44.

235. (h.334) a) $\widehat{CKM} = \widehat{CEM} = \widehat{CED}$, có số đo không đổi nên K là điểm cố định.

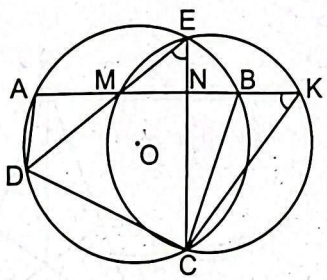
b) Xét đường tròn (O) ta có AN.NB = EN.NC.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEKC, ta có

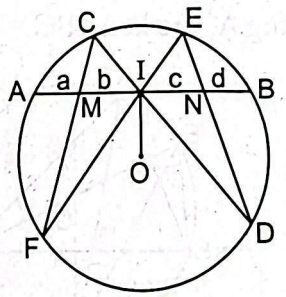
MN.NK = EN.NC.

Suy ra AN.NB = MN.NK ⇒ (a + b)c = b(c + BK)

$$\Rightarrow ac = b.BK \Rightarrow \frac{ac}{b} = BK \text{ (hằng số).}$$



Hình 334



Hình 335

c) (h.335) Đặt AM = a, MI = b, IN = c, NB = d. Theo kết quả của câu b, ta có

$$\frac{a(c+d)}{b} = \frac{(a+b)d}{c}.$$

Ta lại có a + b = c + d (vì I là trung điểm của AB).

Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$. Do đó $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{c}$.

Ta lại có a + b = c + d nên b = c.

236. (h.336) Theo kết quả của bài tập 235, ta có

$$\frac{AM.IB}{MI} = \frac{AI.NB}{IN}.$$

Đặt IA = a, IM = m, IN = n, IB = b ta có

Scanned with CamScanner

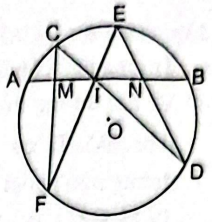
$\dfrac{(a-m)b}{m} = \dfrac{a(b-n)}{n}$

$\Rightarrow bn(a-m) = am(b-n)$

$\Rightarrow abn - bmn = abm - amn$. Chia hai vế cho abmn được

$\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{m}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{IA} + \dfrac{1}{IN} = \dfrac{1}{IB} + \dfrac{1}{IM}$.



Hình 336

Chú ý. Bài tập 236 tổng quát hơn so với bài toán "con bướm".

237. (h.337) Kí hiệu như ở Ví dụ 47.

Gọi K là điểm đối xứng với I qua F, ta có FB = FI = FK nên $\widehat{IBK} = 90^\circ$, vậy K là tâm của đường tròn bàng tiếp.

Kẻ KP ⊥ BC, đặt KP = k. Để chứng minh các đường tròn $(Q; \dfrac{R}{2})$ và (K; k) tiếp xúc ngoài, ta sẽ chứng minh

$$KQ = \frac{R}{2} + k.$$

Đặt OX = x, AX = MD = d, MP = MN = n.

Ta có $MQ' = \dfrac{MD}{2} = \dfrac{d}{2}$.

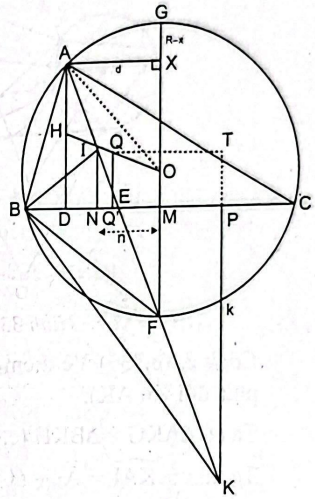
Theo Ví dụ 47a ta có $QQ' = \dfrac{x}{2}$.

Kẻ QT ⊥ KP, ta có $KQ^2 = KT^2 + QT^2$

$= KT^2 + Q'P^2 = \left(\dfrac{x}{2} + k\right)^2 + \left(\dfrac{d}{2} + n\right)^2$

$= \dfrac{x^2}{4} + k^2 + kx + \dfrac{d^2}{4} + n^2 + nd = \dfrac{x^2 + d^2}{4} + k^2 + \left(kx + nd + n^2\right)$. (1)

$\left(\dfrac{R}{2} + k\right)^2 = \dfrac{R^2}{4} + k^2 + Rk$. (2)



Hình 337

So sánh (1) và (2), ta thấy $x^2 + d^2 = R^2$ nên chỉ cần chứng minh

$kx + nd + n^2 = Rk \Leftrightarrow nd + n^2 = k(R - x)$

$\Leftrightarrow nd + d \cdot ME = k(R - x)$ (vì $n^2 = d \cdot ME$ theo Ví dụ 47b)

$\Leftrightarrow d(n + ME) = k(R - x)$

$\Leftrightarrow AX \cdot PE = KP \cdot XG$

$\Leftrightarrow \dfrac{AX}{KP} = \dfrac{XG}{PE}$. Đúng vì $\Delta AXG \backsim \Delta KPE$.

Scanned with CamScanner

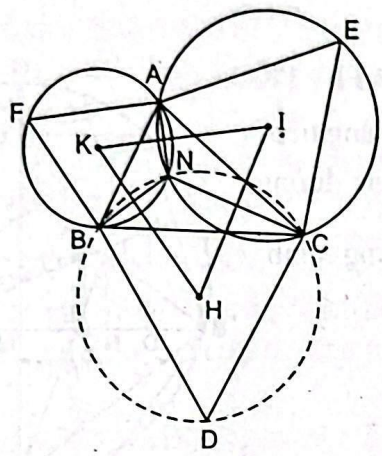
238. *Cách 1.* (h.338) Ta vẽ hình trong trường hợp góc lớn nhất của ΔABC nhỏ hơn 120°. Trường hợp còn lại, bạn đọc tự chứng minh.

Vẽ các đường tròn tâm I, K ngoại tiếp các tam giác ACE, ABF, chúng cắt nhau tại N (khác A). Ta có $\widehat{ANB} = 120^\circ$, $\widehat{ANC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BNC} = 120^\circ$. Suy ra N nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

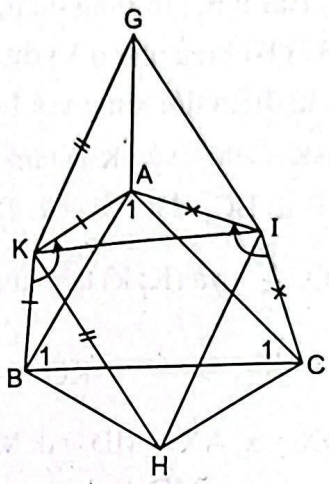
Ta có $NA \perp IK$, $NB \perp KH$ và $\widehat{ANB} = 120^\circ$ nên $\widehat{K} = 60^\circ$.

Tương tự $\widehat{I} = 60^\circ$.

Do đó ΔHIK đều.



Hình 338



Hình 339

Cách 2. (h.339) Vẽ điểm G sao cho $\widehat{AKG} = \widehat{BKH}$ và KG = KH (G và H nằm khác phía đối với AK).

Ta có $\Delta AKG = \Delta BKH$ (c.g.c), suy ra AG = BH và $\widehat{KAG} = \widehat{KBH} = \widehat{B}_1 + 60^\circ$.

Ta lại có $\widehat{KAI} = \widehat{A}_1 + 60^\circ$ nên $\widehat{IAG} = 360^\circ - (\widehat{B}_1 + 60^\circ + \widehat{A}_1 + 60^\circ)$

$= 240^\circ - (\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1) = 240^\circ - (180^\circ - \widehat{C}_1) = 60^\circ + \widehat{C}_1 = \widehat{ICH}$.

Do đó $\Delta IAG = \Delta ICH$ (c.g.c), suy ra IG = IH.

$\Delta IKG = \Delta IKH$ (c.c.c), suy ra $\widehat{IKG} = \widehat{IKH}$.

Ta lại có $\widehat{IKG} + \widehat{IKH} = \widehat{HKG} = \widehat{BKA} = 120^\circ$ nên $\widehat{IKH} = 60^\circ$.

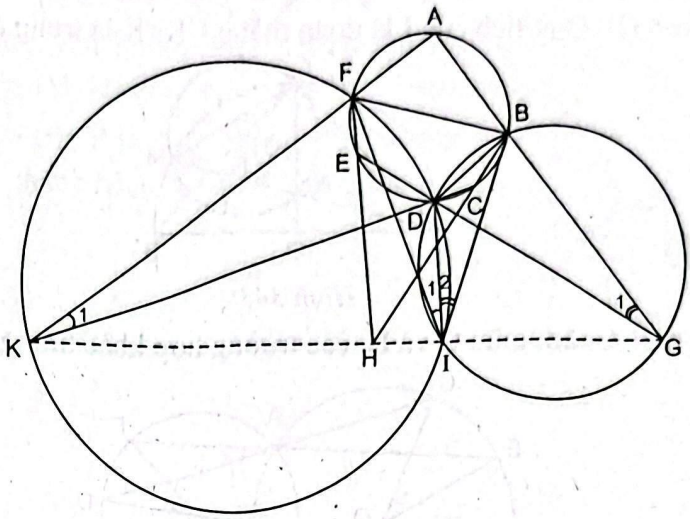
Chứng minh tương tự, $\widehat{KIH} = 60^\circ$.

Suy ra ΔHIK đều.

Chú ý. Có thể trình bày cách 2 dưới dạng một bài toán "cắt giấy". Ta cắt riêng lục giác AKBHCI. Cắt tờ giấy theo HK rồi quay ΔKBH quanh K một góc 120° ngược chiều kim đồng hồ thì B trùng A, còn H đến vị trí G. Cắt tờ giấy theo HI rồi quay ΔICH quanh I một góc 120° theo chiều kim đồng hồ thì C trùng A, còn H trùng G (vì IA = IC, $\widehat{IAG} = \widehat{ICH}$ và AG = CH). Bạn đọc tự chứng minh tiếp.

Scanned with CamScanner

239. Xét lục giác nội tiếp ABCDEF có G là giao điểm của AB và DE, H là giao điểm của BC và EF, K là giao điểm của CD và FA (h.340). Ta phải chứng minh ba điểm K, H, G thẳng hàng.



Hình 340

Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔBGD và đường tròn ngoại tiếp ΔDFK, chúng cắt nhau ở I (khác D). Trước hết, ta chứng minh bốn điểm B, I, H, F thuộc cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{BIF} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{K}_1 + \hat{G}_1$; $2\hat{K}_1 = sđ(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{FE} - \overset{\frown}{ED})$

$2\hat{G}_1 = sđ(\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FA} - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CD})$; $2\widehat{FHB} = sđ(\overset{\frown}{FA} + \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{DE})$

nên $\widehat{FHB} = \hat{K}_1 + \hat{G}_1 = \widehat{BIF}$. Vậy bốn điểm B, I, H, F thuộc cùng một đường tròn.

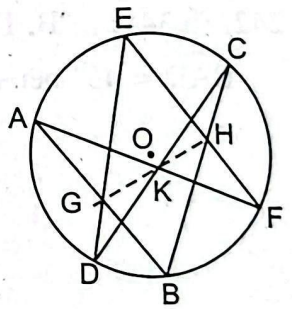
Ta có $\widehat{BIG} = \widehat{BDG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BG),

$\widehat{BDG} = \widehat{BFE}$ (vì BFED là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{BIG} = \widehat{BFE}$.

Ta lại có $\widehat{BFE} + \widehat{BIH} = 180^o$ (vì BIHF là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{BIG} + \widehat{BIH} = 180^o$, suy ra ba điểm H, I, G thẳng hàng.

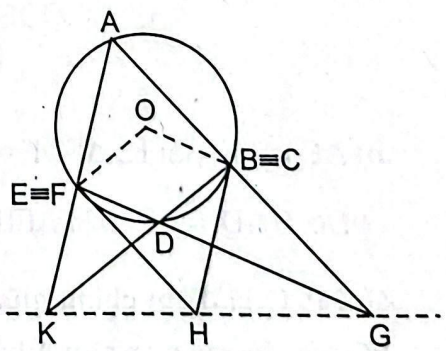
Chứng minh tương tự, ba điểm H, I, K thẳng hàng. Do đó các điểm K, H, I, G thẳng hàng.

Chú ý: a) Bài tập 239 vẫn đúng nếu thay lục giác nội tiếp ABCDEF bởi sáu điểm A, B, C, D, E, F thuộc cùng một đường tròn: Nếu sáu điểm A, B, C, D, E, F thuộc cùng một đường tròn và G, H, K theo thứ tự là giao điểm của AB và DE, BC và EF, CD và FA (h.341) thì ba điểm G, H, K thuộc cùng một đường thẳng (gọi là *đường thẳng Pascal).*



Hình 341

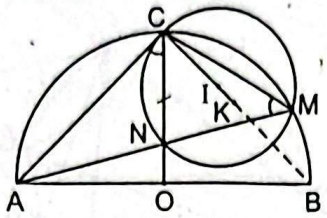
b) Đặc biệt hoá Bài tập 239 khi B ≡ C, E ≡ F, ta có bài toán: Nếu ABDE là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) có các đường thẳng chứa cạnh đối cắt nhau tại G và K, các tiếp tuyến tại B và E cắt nhau tại H thì ba điểm G, H, K thẳng hàng (h.342).



Hình 342

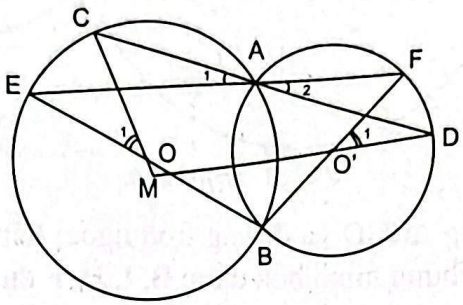
Scanned with CamScanner

240. (h.343) Ta có $\widehat{CMN} = \widehat{NCA}$ (cùng bằng 45°) nên chứng minh được CA là tiếp tuyến của đường tròn (I). Quỹ tích của I là đoạn thẳng CK (K là trung điểm của CB).



Hình 343

241. (h.344 ứng với A nằm giữa C và D, các trường hợp khác tương tự).



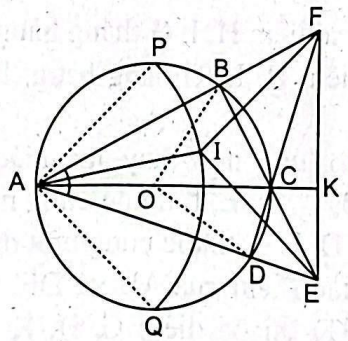
Hình 344

Vẽ đường kính BOE và BO'F thì E, A, F thẳng hàng.

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O'_1}$. Suy ra O, O', B, M thuộc cùng một đường tròn.

Quỹ tích M là đường tròn ngoại tiếp $\Delta BOO'$.

242. (h.345) a) B, D thuộc đường tròn (O) đường kính AC cố định. Đặt AC = 2a. Do $\widehat{BAD} = 45°$ nên ΔBOD vuông cân, $BD = OB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.



Hình 345

b) AC cắt EF tại K, $\Delta FDE = \Delta ADC$ (g.c.g) nên EF = AC = 2a.

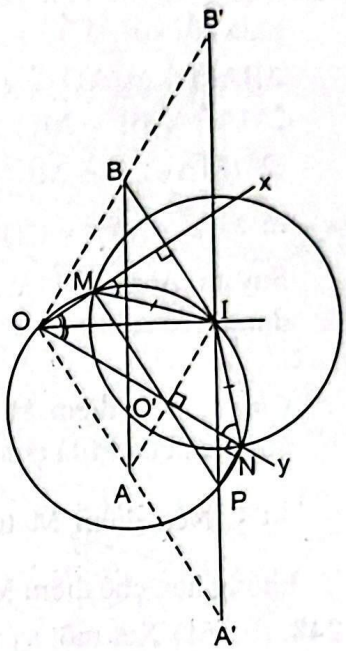
c) Do $\widehat{BAD} = 45°$ nên ΔEIF vuông cân, $IA = IE = IF = \dfrac{EF}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Gọi P, Q là điểm chính giữa của các cung AC, ta có IA = PA. Quỹ tích của I là cung PQ của đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{2}$.

Scanned with CamScanner

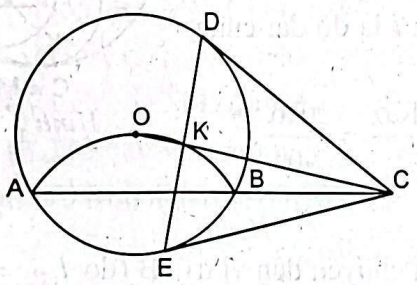
243. (h.346) a) $\widehat{IMx} = \widehat{INO}$ nên OMIN là tứ giác nội tiếp. O' cách đều O và I. Quỹ tích của O' là đoạn thẳng AB nằm trên đường trung trực của OI (IA ⊥Oy, IB ⊥ Ox).

b) M, N thuộc đường tròn đường kính OP. Điểm I cũng thuộc đường tròn đó (vì OMIN là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{OIP} = 90^\circ$. Quỹ tích của P là đoạn thẳng A'B' vuông góc với OI tại I (O, A, A' thẳng hàng; O, B, B' thẳng hàng).

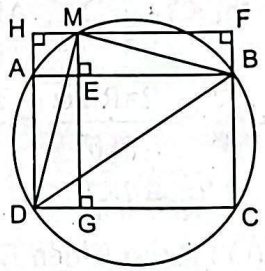


Hình 346

244. (h.347) Ta có CO ⊥ DE nên $CO \cdot CK = CD^2 = CA \cdot CB$, suy ra ABKO là tứ giác nội tiếp. Quỹ tích của K là cung AOB.



Hình 347



Hình 348

245. (h.348) Ta có

$$BD^2 = \left(ME^2 + MF^2\right) + \left(MG^2 + MH^2\right) = MB^2 + MD^2$$

$\Leftrightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Quỹ tích của M là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

246. (h.349) a) Vẽ ΔBMN đều (N khác phía C đối với BM).

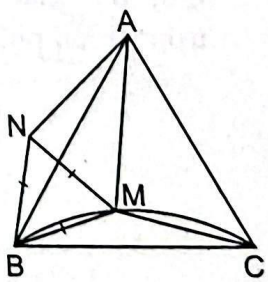
ΔBNA = ΔBMC (c.g.c) nên NA = MC.

Ta có $MA^2 = MB^2 + MC^2 = MN^2 + NA^2$

nên $\widehat{MNA} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{BNA} = 150^\circ$, do đó $\widehat{BMC} = 150^\circ$.

Quỹ tích của M là cung chứa góc 150° dựng trên BC.

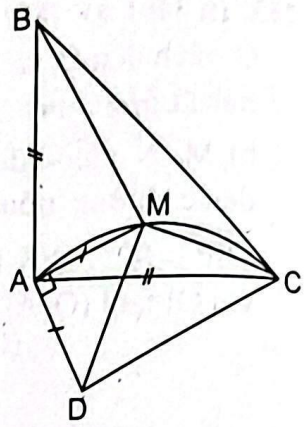
b) Quỹ tích của M là cung chứa góc 30° dựng trên BC.



Hình 349

Scanned with CamScanner

247. (h.350) Vẽ tam giác MAD vuông cân tại A (M và D khác phía đối với AC).



Hình 350

$\Delta BAM = \Delta CAD$ (c.g.c) nên $BM = CD$. Ta có:

$2MA^2 = MB^2 - MC^2 \Rightarrow 2MA^2 + MC^2 = MB^2$

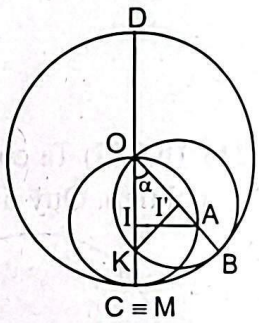
$\Rightarrow (MA\sqrt{2})^2 + MC^2 = CD^2$

$\Rightarrow MD^2 + MC^2 = CD^2 \Rightarrow \widehat{DMC} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{AMC} = 135^\circ$. Quỹ tích của M là cung chứa góc 135° dựng trên AC.

Chú ý. Nếu điểm M nằm ngoài ΔABC, ta chứng minh được quỹ tích của M là cung chứa góc 45° dựng trên AC (cung nằm khác phía với B đối với AC). Nếu điểm M trùng A hoặc C, ta cũng có $MA^2 = \dfrac{MB^2 - MC^2}{2}$. Do đó nếu không hạn chế điểm M nằm trong ΔABC thì quỹ tích của M là một đường tròn.

248. (h.351) Xét một vị trí của (O') khi (O') tiếp xúc với (O) tại M, khi đó $M \equiv C \in (O)$, còn $O' \equiv I$, là trung điểm của OC. Kẻ đường kính COD.



Hình 351

Bây giờ xét (O') ở vị trí bất kì: (O') tiếp xúc với (O) ở B, O' ở vị trí I'. Gọi A là giao điểm của OB với đường tròn (I; IM). Đặt $\widehat{COB} = \alpha$ thì $\widehat{CIA} = 2\alpha$, $\widehat{AI'K} = 2\alpha$. Kí hiệu l là độ dài cung, ta có:

$$l_{\overset{\frown}{MA}} = l_{\overset{\frown}{BK}} = \frac{2\pi R.2\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi R\alpha}{90^\circ}, \quad l_{\overset{\frown}{CB}} = \frac{2\pi.2R.\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi R\alpha}{90^\circ}.$$

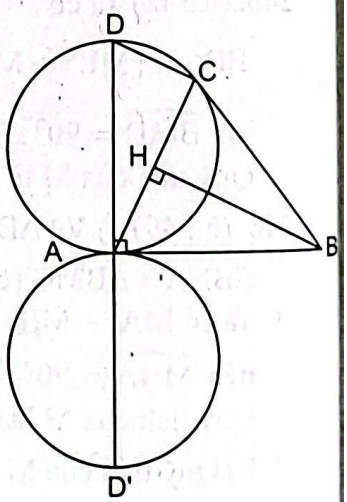
Suy ra $l_{\overset{\frown}{MA}} = l_{\overset{\frown}{BK}} = l_{\overset{\frown}{CB}}$.

Do đó khi (O') lăn từ C đến B thì bán kính IA di chuyển đến vị trí I'B (do $l_{\overset{\frown}{MA}} = l_{\overset{\frown}{CB}}$), còn M di chuyển đến vị trí K (vì $l_{\overset{\frown}{AM}} = l_{\overset{\frown}{BK}}$).

Vậy điểm M di chuyển trên đường kính CD của (O).

Bạn đọc tự chứng minh phần đảo.

249. (h.352) Kẻ AD vuông góc và bằng AB.



Hình 352

Ta có $\Delta ACD = \Delta BHA$ (c.g.c) nên $\widehat{ACD} = \widehat{BHA} = 90^\circ$.

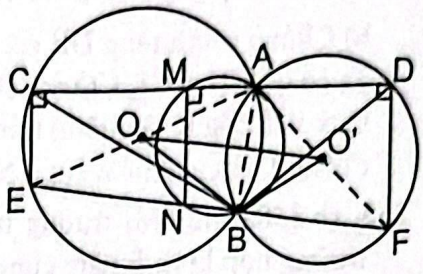
Quỹ tích của C là đường tròn đường kính AD (có hai đường tròn về hai phía của AB).

Scanned with CamScanner

250. (h.353)

a) Vẽ đường kính AOE, AO'F thì E, B, F thẳng hàng. Gọi N là giao điểm của EF với đường trung trực của CD. N là điểm cố định (trung điểm của EF).

Quỹ tích của M là đường tròn đường kính AN (đường tròn này đi qua B).



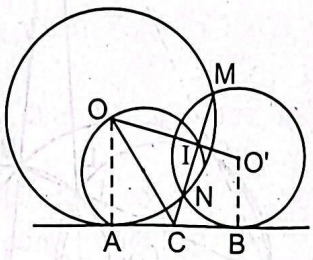
Hình 353

b) $\Delta CBD \backsim \Delta OBO'$ (g.g), từ đó chứng minh được

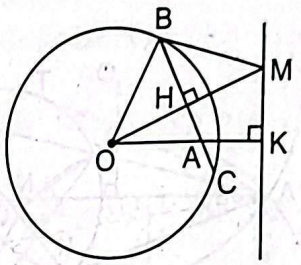
$$\frac{CB}{BD} = \frac{OB}{BO'} = \frac{3}{2}.$$

c) Khi d // OO' thì độ dài CD lớn nhất.

251. (h.354) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm C của AB. Điểm I di chuyển trên đường tròn đường kính OC (phần nằm trong đường tròn tâm O).



Hình 354



Hình 355

252. (h.355) Kẻ MK ⊥ OA. Đặt OB = R. Gọi H là giao điểm của OM và BC.

Ta có $OA.OK = OH.OM = R^2$ nên K là điểm cố định.

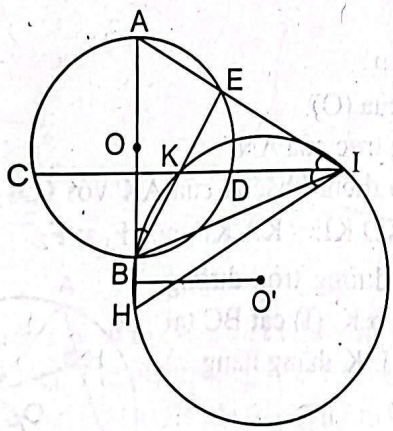
Quỹ tích của M là đường vuông góc với OK tại K.

253. (h.356 ứng với trường hợp CD cắt bán kính OB, các trường hợp khác tương tự)

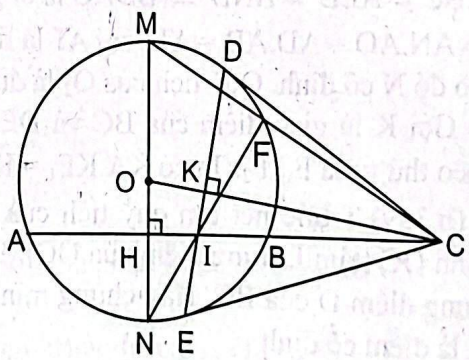
Đường tròn ngoại tiếp ΔBIK cắt AB tại H (khác B). Lần lượt chứng minh

$\overset{\frown}{HIK} = \overset{\frown}{ABK} = \overset{\frown}{AIK}$. Do đó H đối xứng với A qua CD.

Quỹ tích của O' là đường trung trực của BH.



Hình 356



Hình 357

Scanned with CamScanner

254. (h.357) a) Quỹ tích của D, E là đường tròn (C; $\sqrt{CA.CB}$).

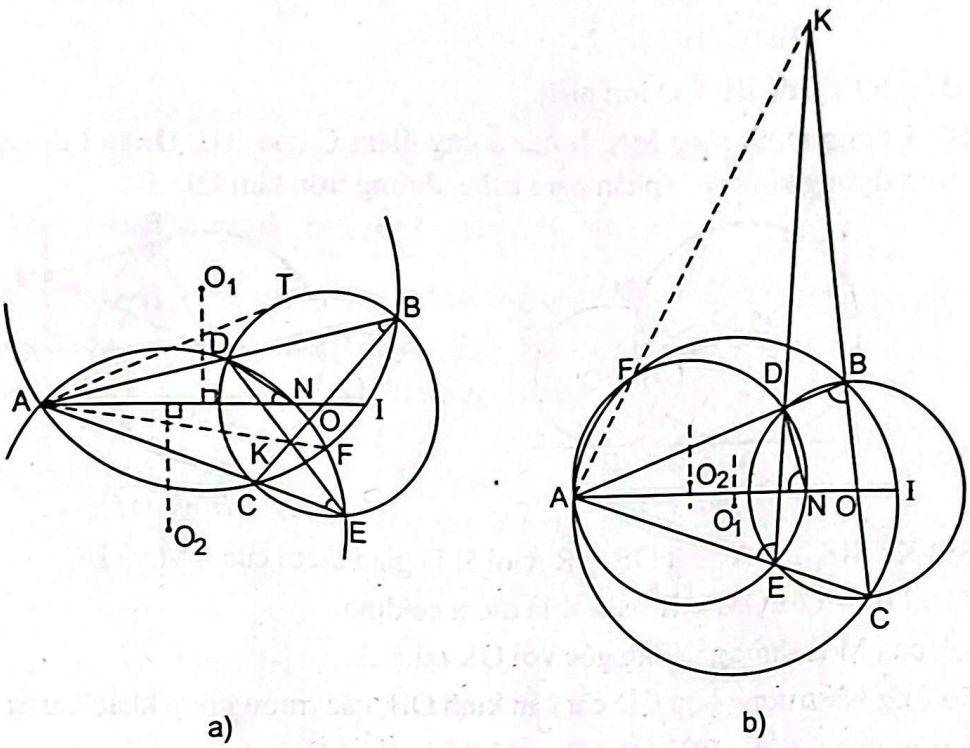
b) Chứng minh rằng DE cắt AB tại một điểm I cố định. Gọi H là trung điểm của AB.

Ta có CI.CH = CK.CO = CD^2 = CA.CB nên I là điểm cố định.

Quỹ tích của K là đường tròn đường kính IC.

c) Gọi I' là giao điểm của FN và AB. Chứng minh rằng CI' = CI để suy ra I' ≡ I.

255. (h.358a ứng với trường hợp D và E nằm khác phía đối với BC, h.358b ứng với trường hợp D và E nằm cùng phía đối với BC).



Hình 358

a) Gọi I là giao điểm của AO với (O_1).

Ta có OA.OI = OB.OC = R^2 nên I cố định. Quỹ tích O_1 là đường trung trực của AI.

b) Gọi N là giao điểm của AO với (O_2). Ta có:

$\widehat{ABC} = \widehat{AED} = \widehat{AND} \Rightarrow$ BDNO là tứ giác nội tiếp

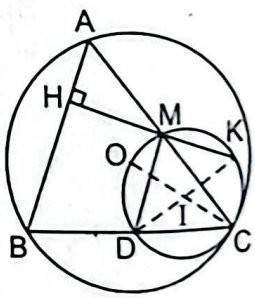
$\Rightarrow$ AN.AO = AD.AB = AT^2 với AT là tiếp tuyến của (O).

Do đó N cố định. Quỹ tích của O_2 là đường trung trực của AN.

c) Gọi K là giao điểm của BC và DE. Gọi giao điểm khác A của AK với (O_1), (O_2) theo thứ tự là F_1, F_2. Ta có $KA.KF_1 = KB.KC = KD.KE = KA.KF_2$ nên $F_1 \equiv F_2$.

256. (h.359) Trước hết tìm quỹ tích của M, đó là đường tròn đường kính OC (tâm I, trung điểm của OC). HM cắt (I) ở K. (I) cắt BC tại trung điểm D của BC. Hãy chứng minh rằng D, I, K thẳng hàng và K là điểm cố định.

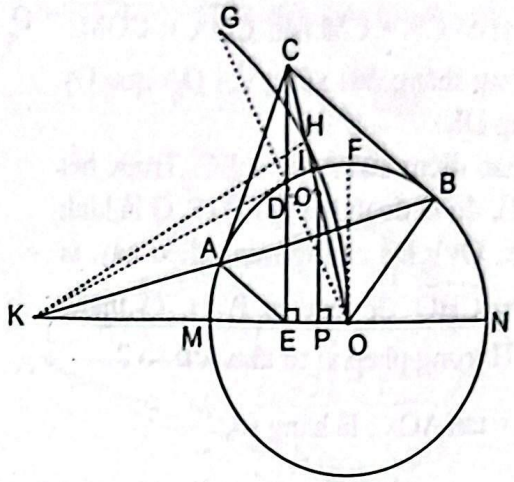
Quỹ tích của H là đường tròn đường kính BK.



Hình 359

Scanned with CamScanner

257. (h.360)



Hình 360

a) Gọi I là giao điểm của OC với (O), ta chứng minh được BI là tia phân giác của góc ABC.

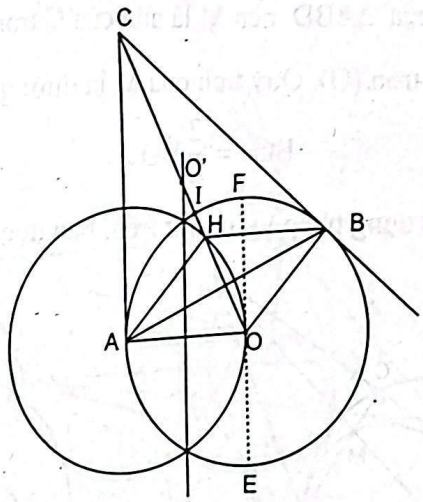
Quỹ tích I là cung DF của nửa đường tròn (O) với KD là tiếp tuyến của (O), $OF \perp KO$.

b) Kẻ $DE \perp KO$ thì E cố định. Ta chứng minh được tứ giác AEOB nội tiếp nên C, A, E, O, B thuộc cùng một đường tròn.

Quỹ tích O' là tia Px của đường trung trực của EO.

c) OAHB là hình thoi nên H đối xứng với O qua KB, do đó KH = KO. Quỹ tích H là cung OG của đường tròn (K; KO) với G đối xứng O qua D.

258. (h.361)



Hình 361

a) Gọi I là giao điểm của OM với (O), ta có BI là tia phân giác của góc ABM.

Quỹ tích I là nửa đường tròn FAE ($FE \perp OA$).

b) Tứ giác MAOB nội tiếp.Quỹ tích O' là đường trung trực của OA.

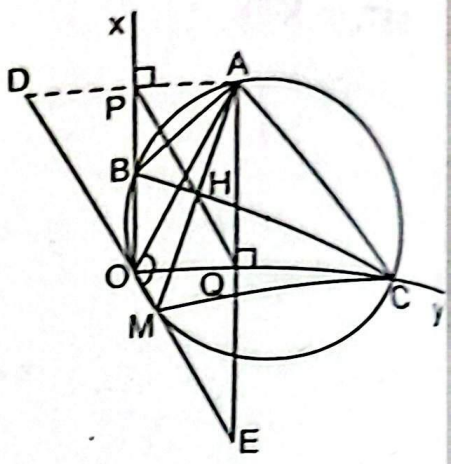
c) OAHB là hình thoi nên AH = AO. Quỹ tích H là đường tròn (A; AO).

Scanned with CamScanner

259. (h.362) a) *Cách 1.* A, B, M đều thuộc đường tròn đường kính BC, ta lại có CA = CM nên $\overset{\frown}{COA} = \overset{\frown}{COM}$. Do đó M thuộc đường thẳng đối xứng với OA qua Oy (giới hạn: đoạn thẳng DE).

Cách 2. Gọi H là giao điểm của AM và BC. Trước hết ta tìm quỹ tích của H, đó là đoạn thẳng PQ (P, Q là hình chiếu của A trên Ox, Oy). Để chứng minh điều này, ta chứng minh $\overset{\frown}{BHP} = \overset{\frown}{CHQ}$ để suy ra P, H, Q thẳng hàng. M là ảnh của H trong phép vị tự tâm A tỉ số 2.

b) $\dfrac{AB}{AC} = \tan\overset{\frown}{ACB} = \tan\overset{\frown}{AOx}$, là hằng số.

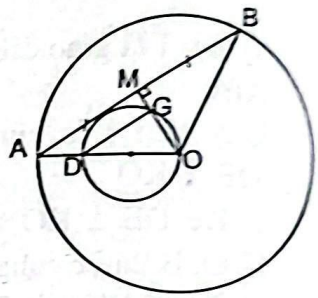


Hình 362

260. (h.363) Gọi M là trung điểm của AB. G là ảnh của M trong phép vị tự tâm O tỉ số $\dfrac{2}{3}$. Quỹ tích của M là đường tròn đường kính OA. Quỹ tích của G là đường tròn đường kính OD với $OD = \dfrac{2}{3}OA$.

Chứng minh trực tiếp: Lấy D trên OA sao cho $OD = \dfrac{2}{3}OA$ thì GD // MA. Do $\overset{\frown}{OMA} = 90^\circ$ nên $\overset{\frown}{OGD} = 90^\circ$.

Vậy quỹ tích G là đường tròn đường kính OD.

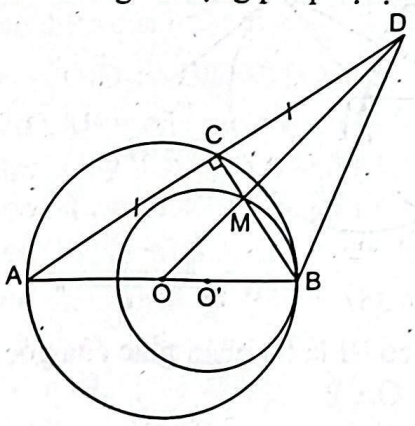


Hình 363

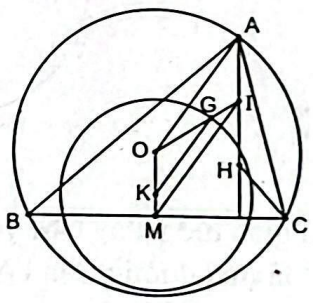
261. (h.364) M là trọng tâm của ΔABD nên M là ảnh của C trong phép vị tự tâm B tỉ số $\dfrac{2}{3}$. Quỹ tích của C là đường tròn (O). Quỹ tích của M là đường tròn (O') với

$$BO' = \frac{2}{3}BO.$$

Lưu ý. Từ định hướng sử dụng phép vị tự như trên, bạn đọc tự chứng minh trực tiếp.



Hình 364



Hình 365

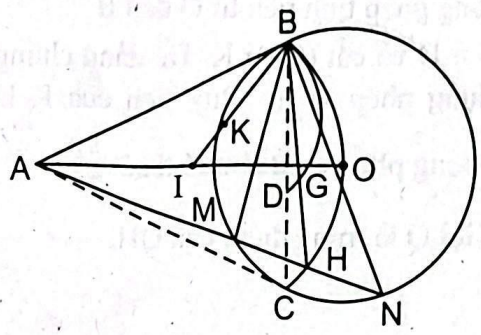
262. (h.365) Gọi I là trung điểm của AH, M là trung điểm của BC. Ta chứng minh được AH = 2OM nên AI = OM, OMIA là hình bình hành nên MI = OA = R.

Scanned with CamScanner

Quỹ tích của I là đường tròn (M; R). G là ảnh của I trong phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{2}{3}$.

Quỹ tích của G là đường tròn (K; $\frac{2}{3}$R) với OK = $\frac{2}{3}$OM.

263. (h.366)



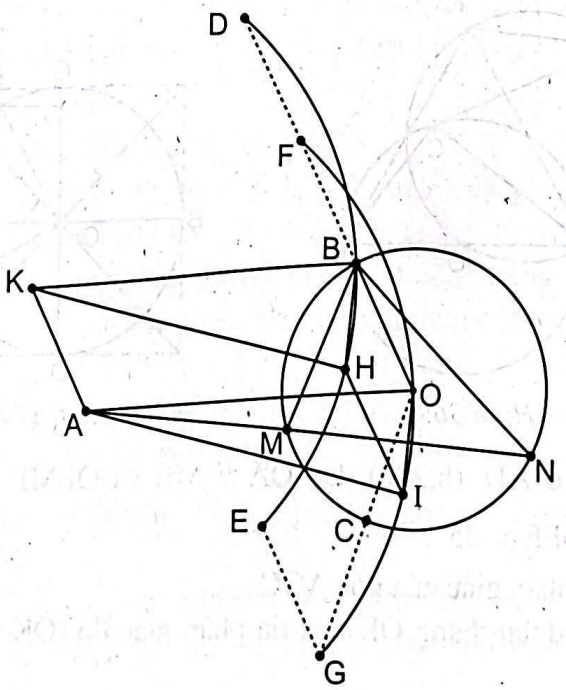
Hình 366

Gọi H là trung điểm của MN. Quỹ tích của H là cung BOC của đường tròn tâm I đường kính AO.

G là ảnh của H trong phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{2}{3}$.

Từ đó, quỹ tích của G là cung BD của đường tròn tâm K bán kính KB với K thuộc BI và BK = $\frac{2}{3}$BI (D thuộc đoạn thẳng BC, trong đó AC là tiếp tuyến của đường tròn đã cho).

264. (h.367)



Hình 367

a) AI = AO nên quỹ tích I là cung FG của đường tròn (A; AO) với F đối xứng O qua B, G đối xứng O qua C (AC là tiếp tuyến).

Scanned with CamScanner

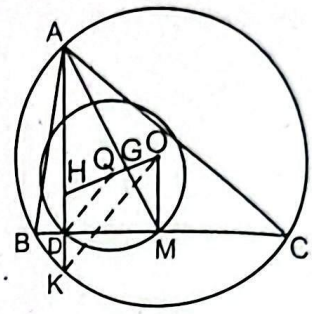
b) BH gấp đôi khoảng cách từ O đến MN.

Ta có BH = OI và BH // OI nên IH = OB và IH // OB.

Vẽ hình bình hành AOBK thì K cố định. Dễ chứng minh KH = AI = AO = KB. Quỹ tích của H là cung DE của đường tròn (K; KB) với D đối xứng B qua F, GE // OB và GE = OB.

Lưu ý. H là ảnh của I trong phép tịnh tiến từ O đến B.

265. (h.368) a) AH cắt BC ở D và cắt (O) ở K. Dễ dàng chứng minh DH = DK. Sử dụng phép vị tự: Quỹ tích của K là (O; R). D là ảnh của K trong phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$.



Hình 368

Chứng minh trực tiếp: Gọi Q là trung điểm của OH.

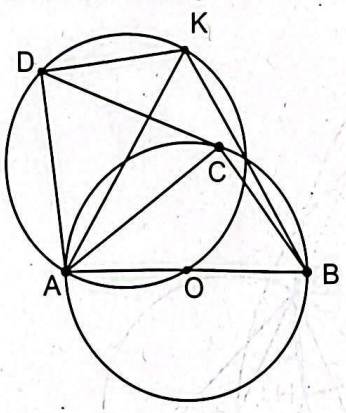
Ta có $QD = \frac{OK}{2} = \frac{R}{2}$.

Quỹ tích của D là đường tròn $(Q; \frac{R}{2})$.

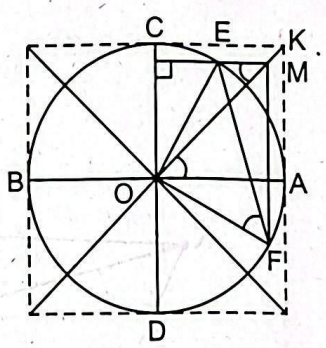
b) Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt OH ở G. Dễ thấy G chia trong OH theo tỉ số 1: 2 nên G là điểm cố định. M là ảnh của A trong phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$. Quỹ tích của M chính là đường tròn (Q) ở câu a (đó là đường tròn Euler của ΔABC).

266. (h.369) D là ảnh của C trong phép quay tâm A góc 60°.

Quỹ tích của D là nửa đường kính AK (với ABK là tam giác đều).



Hình 369



Hình 370

267. Xét $E \in \overset{\frown}{AC}$, $F \in \overset{\frown}{AD}$ (h.370). Do OA // ME và OEMF là tứ giác nội tiếp nên $\overset{\frown}{AOM} = \overset{\frown}{OME} = \overset{\frown}{OFE} = 45^\circ$.

Do đó M thuộc tia phân giác của góc AOC.

Giới hạn: M thuộc đoạn thẳng OK của tia phân giác đó (OK là đường chéo của hình vuông AOCK).

Tương tự đối với các vị trí khác của E và F trên đường tròn, ta được quỹ tích của M là hai đường chéo của hình vuông có cạnh tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, B, C, D.

Scanned with CamScanner

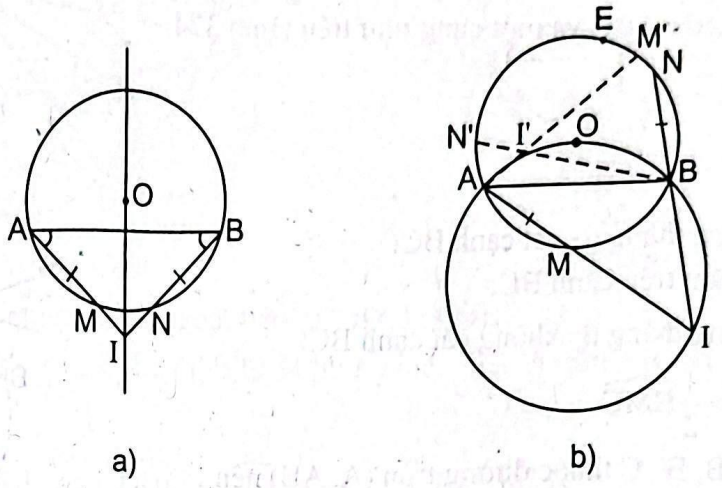
268. Xét hai trường hợp:

a) Các cung AM, BN ngược chiều (h.371a).

Ta có $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BM}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BAM} = \overset{\frown}{ABN} \Rightarrow IA = IB.$

Quỹ tích của I là đường trung trực của AB.



a) b)

Hình 371

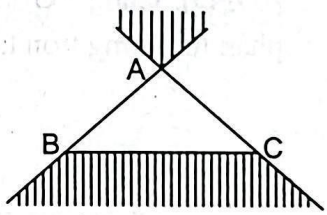
b) Các cung AM, BN cùng chiều (h.371b). Đặt $\overset{\frown}{AOB} = 2\alpha$. Ta chứng minh bốn điểm A, O, B, I thuộc cùng một đường tròn bằng cách chứng minh:

– Nếu I và O cùng phía đối với AB (trường hợp này ứng với $M \in \overset{\frown}{BE}$ trong đó E thuộc cung lớn AB của (O) sao cho AE = AB) thì $\overset{\frown}{AIB} = 2\alpha$.

– Nếu I và O khác phía đối với AB (trường hợp này ứng với các vị trí còn lại của M trên đường tròn O) thì $\overset{\frown}{AIB} = 180^\circ - 2\alpha$.

Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp ΔAOB.

269. Trước hết ta có nhận xét: Để MA là tia phân giác của góc BMC thì tia MA phải cắt cạnh BC. Do đó M phải nằm trong góc A (nhưng không nằm trong ΔABC) hoặc M nằm trong góc đối đỉnh với góc A, tức là M thuộc phần gạch sọc trên Hình 372.

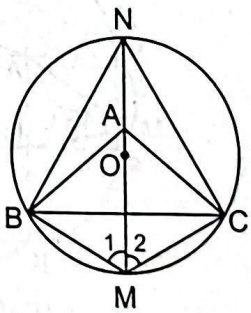


Hình 372

Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp ΔMBC. Xét hai trường hợp:

a) Đường tròn (O) không đi qua A (h.373). Gọi N là giao điểm của tia MA với đường tròn. Do $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ nên $\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{NC}$ suy ra BN = NC.

Ta lại có AB = AC, do đó NA là đường trung trực của BC. Điểm M thuộc phần đường trung trực của BC không nằm trong ΔABC.



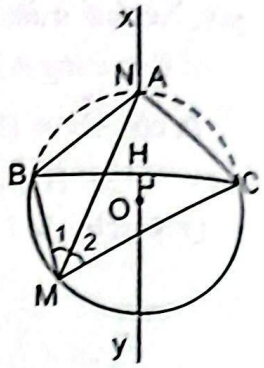
Hình 373

Scanned with CamScanner

b) Đường tròn (O) đi qua A (h.374).

Khi đó đường tròn (O) xác định vì nó chính là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Mọi điểm M thuộc cung BC không chứa A đều thoả mãn bài toán. Mọi điểm M thuộc cung BC chứa A không thoả mãn bài toán (do nhận xét nêu ở trên).

Kết luận. Quỹ tích của M gồm phần đường trung trực của BC nằm ngoài tam giác ABC và một cung như trên Hình 374.



Hình 374

270. (h.375)

– Xét đường thẳng d_1 cắt cạnh BC:

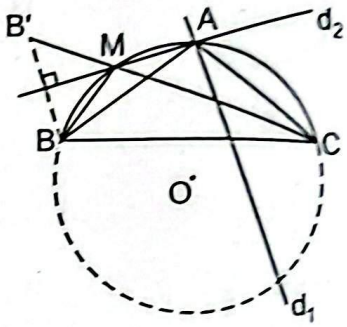
Điểm M nằm trên cạnh BC.

– Xét đường thẳng d_2 không cắt cạnh BC:

Ta có $\widehat{B'} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BMC}$.

Mặt khác B, B', C thuộc đường tròn (A; AB) nên

$$\widehat{B'} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}.$$



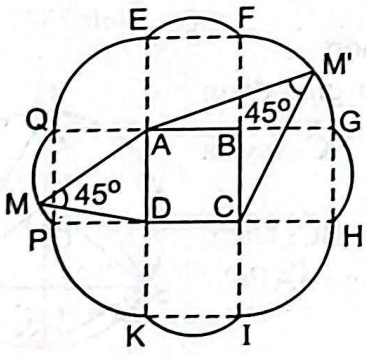
Hình 375

Suy ra $\overset{\frown}{BMC} = \overset{\frown}{BAC}$.

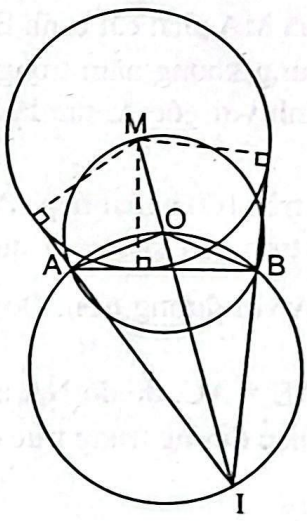
Điểm M nằm trên cung BAC của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Quỹ tích của M là đoạn thẳng BC và cung BAC của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

271. Quỹ tích của M gồm tám cung như trên Hình 376. Cung PQ là một phần của cung chứa góc 45^o dựng trên AD (cũng là cung phần tư đường tròn ngoại tiếp hình vuông ADPQ). Cung FG là một phần của cung chứa góc 45^o dựng trên AC (cũng là cung phần tư đường tròn tâm B bán kính BA).



Hình 376

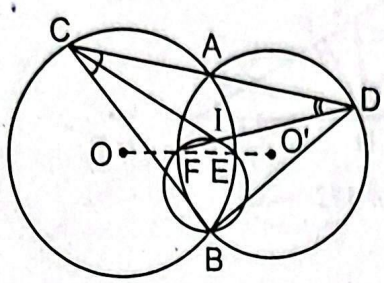


Hình 377

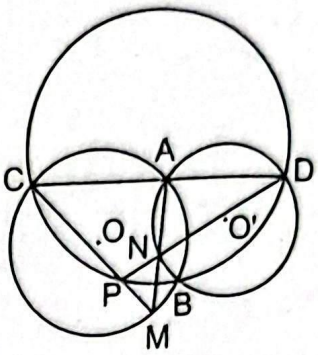
272. Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp ΔAOB (h.377).

Scanned with CamScanner

273. a) Gọi E, F là điểm chính giữa của các cung AB (phần cung của đường tròn này nằm trong đường tròn kia). Ta có O, O', E, F thẳng hàng. Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp ΔBEF (h.378).



Hình 378



Hình 379

b) Quỹ tích của P là đường tròn ngoại tiếp ΔCBD (h.379).

274. (h.380,381,382). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC thì E, F cố định. Ta tính $\overset{\frown}{EHF}$.

$$\overset{\frown}{EHF} = \begin{cases} \overset{\frown}{DHE} + \overset{\frown}{DHF} \text{ nếu } \overset{\frown}{DHE} + \overset{\frown}{DHF} \le 180^\circ \text{ (h.380, h.382)} \\ 360^\circ - (\overset{\frown}{DHE} + \overset{\frown}{DHF}) \text{ nếu } \overset{\frown}{DHE} + \overset{\frown}{DHF} > 180^\circ \text{ (h.381)} \end{cases}$$

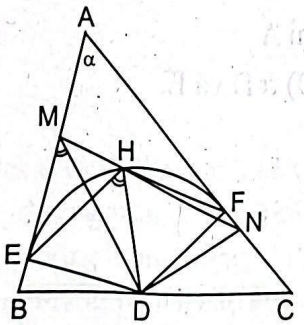
Trước hết tính $\overset{\frown}{DHE} + \overset{\frown}{DHF}$. Do D, H, M, E thuộc cùng một đường tròn, D, H, F, N thuộc cùng một đường tròn nên $\overset{\frown}{DHE} = \overset{\frown}{DMB}$, $\overset{\frown}{DHF} = \overset{\frown}{DNC}$, suy ra

$$\overset{\frown}{DHE} + \overset{\frown}{DHF} = \overset{\frown}{DMB} + \overset{\frown}{DNC} = 360^\circ - (\overset{\frown}{AMD} + \overset{\frown}{AND})$$

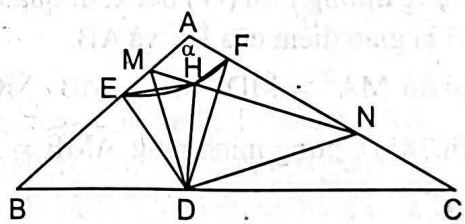
$$= \overset{\frown}{MDN} + \hat{A} = 90^\circ + \alpha \text{ (đặt } \hat{A} = \alpha\text{)}.$$

Xét các trường hợp:

a) $\alpha < 90^\circ$ (h.380): $\overset{\frown}{EHF} = 90^\circ + \alpha$. Quỹ tích của H là cung chứa góc $90^\circ + \alpha$ dựng trên EF (cùng phía với A đối với EF).



Hình 380



Hình 381

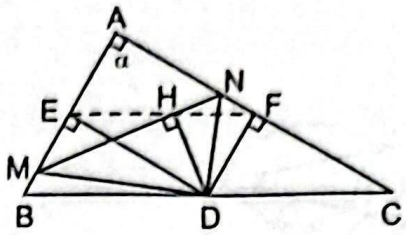
b) $\alpha > 90^\circ$ (h.381):

$\overset{\frown}{EHF} = 360^\circ - (90^\circ + \alpha) = 270^\circ - \alpha$.

Quỹ tích của H là cung chứa góc $270^\circ - \alpha$ dựng trên EF (khác phía với A đối với EF).

Scanned with CamScanner

c) $\alpha = 90^o$ (h.382). Ta có $90^o + \alpha = 180^o$.
Các điểm E, H, F thẳng hàng. Quỹ tích của H là đoạn thẳng EF.

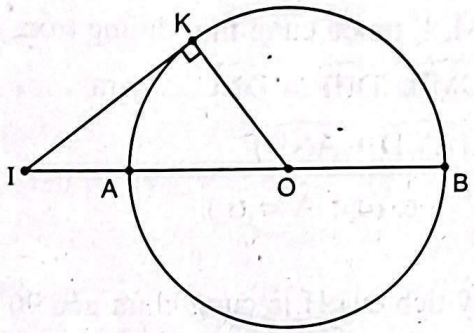


Hình 382

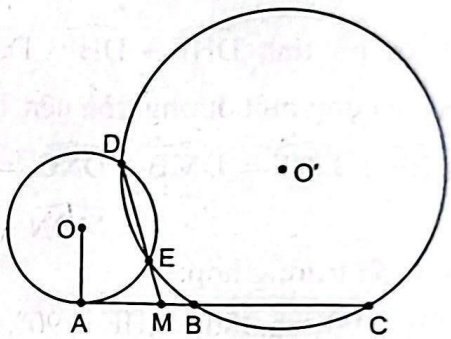
Chuyên đề 3. Dựng hình

275. (h.383) Ta có $IK^2 = IA \cdot IB \Rightarrow 4IA^2 = IA \cdot IB \Rightarrow 4IA = IB \Rightarrow IA = \dfrac{AB}{3}$.

Dựng I thuộc tia đối của tia AB sao cho $AI = \dfrac{AB}{3}$.



Hình 383

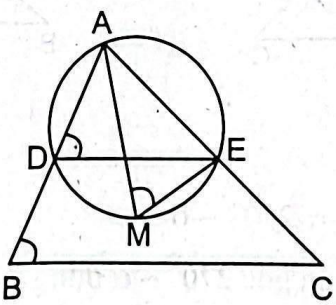


Hình 384

276. (h.384) - Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A.
- Dựng đường tròn (O') bất kì đi qua B và C, cắt (O) ở D và E.
- M là giao điểm của DE và AB.

Khi đó $MA^2 = MD \cdot ME = MB \cdot MC$.

277. (h.385) Chứng minh rằng $\widehat{AME} = \widehat{ABC}$.



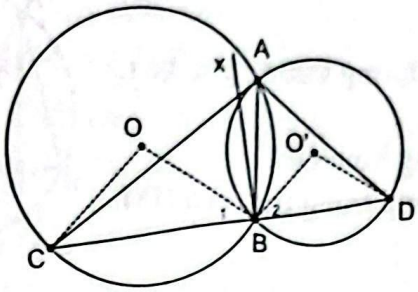
Hình 385

Scanned with CamScanner

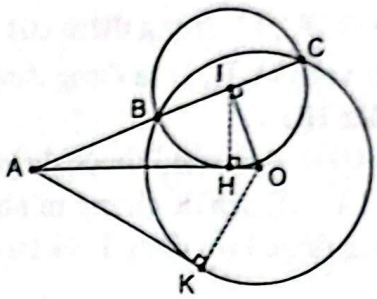
278. (h.386) $\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BAD} \Rightarrow \hat{O} = \hat{O'} \Rightarrow \hat{B_1} = \hat{B_2}$.

Kẻ Bx là tia phân giác của góc OBO' thì Bx ⊥ CD.

Dựng tia Bx rồi dựng CD.



Hình 386



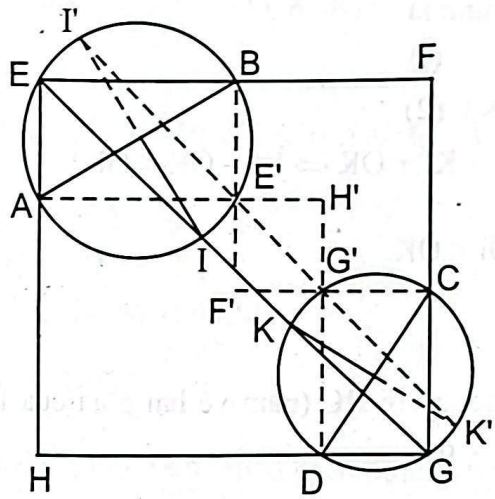
Hình 387

279. (h.387) Gọi I là trung điểm của BC, H là tiếp điểm của OA và (I). Kẻ tiếp tuyến AK với (O).

Ta có $AH^2 = AB \cdot AC = AK^2$ nên AH = AK.

Dựng được H. Dựng I là giao điểm của đường vuông góc với OA tại H và đường tròn đường kính OA.

280. (h.388)



Hình 388

Xét A và B thuộc hai cạnh kề của hình vuông:

– Dựng đường tròn đường kính AB rồi dựng điểm chính giữa I của cung AB.

– Dựng đường tròn đường kính CD rồi dựng điểm chính giữa K của cung CD.

– Đường thẳng IK cắt các đường tròn trên tại E và G. Từ đó dựng được F và H.

Biện luận

Trong cách dựng trên (ứng với A và B thuộc hai cạnh kề của hình vuông), có hai cách chọn điểm I, có hai cách chọn điểm K, ta được bốn nghiệm hình.

Xét A và C thuộc hai cạnh kề của hình vuông, ta cũng được bốn nghiệm hình. Cũng vậy với A và D thuộc hai cạnh kề của hình vuông.

Scanned with CamScanner

Vì mỗi nghiệm hình nói trên được tính trùng nhau hai lần nên nếu I không trùng K thì bài toán có sáu nghiệm hình.

Riêng trường hợp I trùng K, bài toán có vô số nghiệm hình.

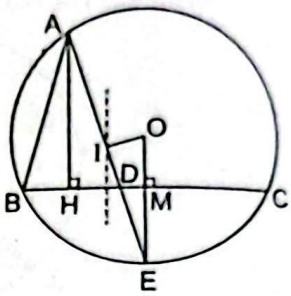
281. (h.389) Gọi E là giao điểm của AD và (O), M là giao điểm của OE và BC, I là trung điểm của AE.

Biết vị trí O, H, D ta dựng được M (chân đường vuông góc kẻ từ O đến HD).

Do OI ⊥ AE nên I thuộc đường tròn đường kính OD.

Do IA = IE nên dễ chứng minh I thuộc đường trung trực của HM.

Dựng được I rồi dựng E và tam giác ABC.



Hình 389

282. (h.390) Dễ chứng minh giao điểm K của đường tròn ngoại tiếp và đoạn nối tâm I của đường tròn nội tiếp với tâm P của đường tròn bàng tiếp là trung điểm của IP.

Cách dựng

– Dựng trung điểm K của IP.

– Dựng đường tròn (O; OK) cắt KI ở A.

– Dựng đường tròn (K; KI) cắt (O) ở B, C.

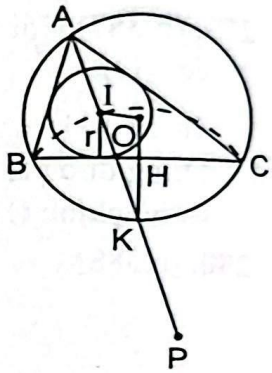
Điều kiện có nghiệm hình là

$$\begin{cases}(O; OK) \text{ cắt } (K; KI) & (1)\\ I \text{ ở bên trong } (O; OK) & (2)\end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ KI – OK < OK < KI + OK $\Leftrightarrow$ KI – OK < OK

(2) $\Leftrightarrow$ OI < OK.

Gộp (1) và (2) ta có OI < OK.



Hình 390

283. (h.391)

– Dựng BC = a.

– Dựng d_1, d_2 song song với BC (nằm về hai phía của BC) cách BC khoảng cách r, R_a.

– Dựng đường thẳng d song song cách đều d_1, d_2.

– Dựng giao điểm K của d với đường trung trực của BC.

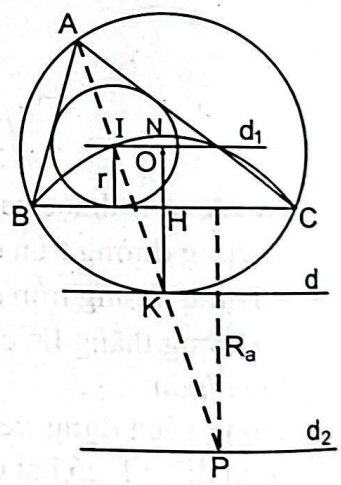
– Dựng đường tròn (K; KB), cắt d_1 ở I.

– KI cắt đường tròn ngoại tiếp ΔBKC ở A.

Gọi H là trung điểm của BC thì KH ⊥ BC. Gọi N là giao điểm của KH với d_1. Ta có

$$KN = \frac{R_a + r}{2},\ KH = \frac{R_a + r}{2} - r = \frac{R_a - r}{2}.$$

Điều kiện có nghiệm hình là đường tròn (K; KB) có giao điểm với d_1, tức là



Hình 391

Scanned with CamScanner

$KB \geq KN \Leftrightarrow KB^2 \geq KN^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{R_a - r}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{R_a + r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{rR_a}$,

trong đó $R_a \geq r$.

284. (h.392) *Phân tích.* Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Ta có

$$AD.DE = BD.DC = AD^2 \text{ nên } DE = AD.$$

Gọi M là giao điểm của OE và BC, ta có ME = AH = h.

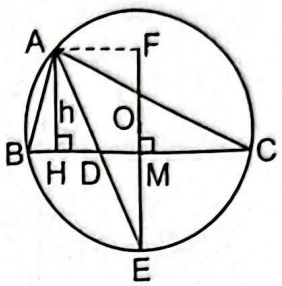
Cách dựng:

– Dựng BC = a.

– Trên đường vuông góc với BC tại trung điểm M của BC, lấy E và F sao cho ME = MF = h.

– Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp ΔBEC.

– Đường thẳng đi qua F và song song với BC cắt (O) ở A.

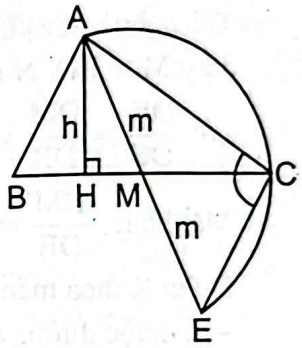


Hình 392

285. (h.393) Dựng ΔAHM. Dựng E đối xứng với A qua M.

Dựng cung chứa góc $180^\circ - \widehat{A}$ dựng trên AE.

Điểm C là giao điểm của HM với cung chứa góc trên.



Hình 393

286. (h.394) Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC, M là trung điểm của BC.

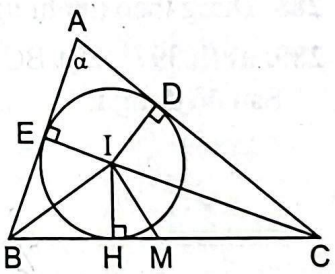
Kẻ IH ⊥ BC, ID ⊥ AC, IE ⊥ AB. Ta có

$AC - AB = CD - BE = CH - BH$

$= (CM + MH) - (BM - MH) = 2MH.$

Do đó $HM = \frac{d}{2}$. Dựng được ΔIHM.

Ta có $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Dựng được ΔBIC theo cách dựng ở Bài tập 285. Sau đó dựng A.



Hình 394

287. Lấy D ∈ AB, E ∈ AC sao cho BD = CE = BC. Thế thì AD = m, AE = n, ΔADE xác định ngay.

Cách 1. (h.395) Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có

$\widehat{CIE} = \widehat{CIB} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$; $\widehat{BID} = \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

suy ra $\widehat{DIE} = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$.

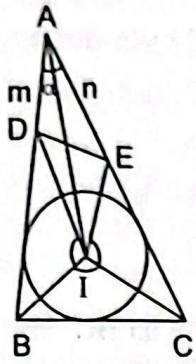
Điểm I thoả mãn hai điều kiện:

– I thuộc tia phân giác của góc A.

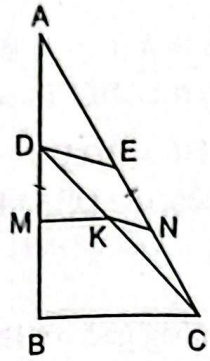
Scanned with CamScanner

– I thuộc cung chứa góc $90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$ dựng trên DE (khác phía với A đối với DE).

Điều kiện có nghiệm hình: $\alpha < 60^\circ$.



Hình 395



Hình 396

Cách 2. (h.396) Lấy D, E trên AB, AC như cách 1.

Lấy $M \in BD$, $N \in CE$ sao cho DM = EN. Kẻ MK song song với BC, cắt DC ở K. Ta có: $\frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB} = \frac{EN}{EC}$ nên KN // DE.

Mặt khác, $\frac{DM}{DB} = \frac{MK}{BC}$ nên DM = MK.

Điểm K thoả mãn hai điều kiện:

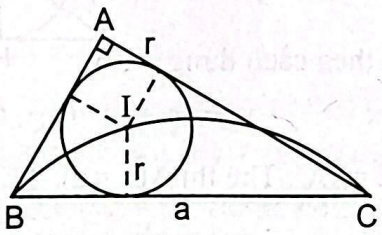
– K thuộc đường thẳng đi qua N và song song với DE.

– K thuộc đường tròn (M; MD).

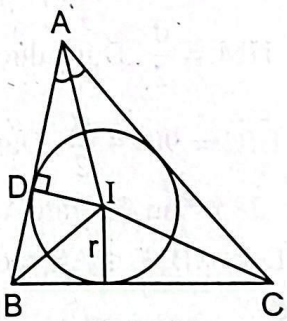
Giao điểm của DK và AE cho ta điểm C, từ đó dựng được B.

288. Dựng theo thứ tự ngược.

289. a) (h.397). Đặt BC = a. Trước hết tính a theo p và r được a = p – r. Dựng BC = a. Sau đó dựng I.



Hình 397



Hình 398

b) (h.398) Giả sử BC = a. Ta có ID = r, ta tính được AD = p – a, do đó dựng được góc IAD, nên dựng được $\widehat{BIC} = 90^\circ + \widehat{IAD}$. Hãy dựng ΔBIC, sau đó dựng A.

290. Dựng theo thứ tự ngược.

291. (h.399) *Phân tích.* Lấy A' đối xứng với A qua d. Trên tia đối của tia MB lấy K sao cho MK = MA. Ta có BK = a. Dựng đường tròn (B; a), đường tròn này và A' là cố định.

Scanned with CamScanner

Kẻ tiếp tuyến của (B) tại K, cắt AA' ở P. Để dựng M, cần dựng K, muốn vậy cần dựng P. Vẽ đường thẳng bất kì đi qua P, cắt (B) ở E và F. Ta có $PA'.PA = PK^2 = PE.PF$ nên A, A', E, F thuộc cùng một đường tròn. Suy ra cách dựng như sau:

Cách dựng

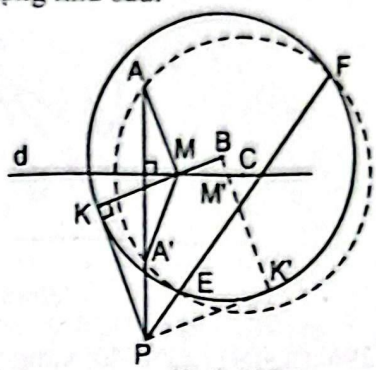
– Dựng A' đối xứng với A qua d.

– Dựng đường tròn (B; a).

– Dựng đường tròn phụ (C) bất kì đi qua A và A', cắt (B) ở E, F.

– Gọi P là giao điểm của AA' và EF, dựng tiếp tuyến PK với (B).

– M là giao điểm của BK và d.



Hình 399

Chứng minh. Ta có $PA'.PA = PE.PF = PK^2$, từ đó PK là tiếp tuyến của đường tròn đi qua A, A', K. Tâm của đường tròn này chính là M (vì $MK \perp PK$ tại K và $M \in d$ là trung trực của AA'). Vậy MA = MK, do đó BM + MA = BM + MK = BK = a.

Biện luận: Nếu BA' < a thì bài toán có hai nghiệm hình (dựng được hai tiếp tuyến từ P với (B), trên hình vẽ là PK và PK').

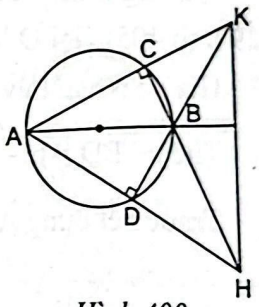
Nếu BA' = a thì bài toán có một nghiệm hình.

Nếu BA' > a thì bài toán không có nghiệm hình.

292. (h.400) - Dựng C là giao điểm của KA với đường tròn.

- Dựng D là giao điểm của KB với đường tròn.
- Dựng H là giao điểm của AD và CB.

KH là đường thẳng phải dựng.



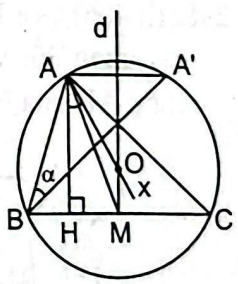
Hình 400

293. (h.401) *Cách 1.* Dựng ΔAHM vuông tại H.

Qua M dựng d // AH. Dựng A' đối xứng với A qua d.

Ta có $\widehat{ABA'} = \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$ nên dựng B là giao điểm của HM với cung chứa góc α dựng trên AA'.

Cách 2. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta chứng minh được $\widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{HAO}$ sau đó ta dựng ΔAHM vuông tại H. Dựng $\widehat{HAx} = \alpha$ (Ax và AM cùng phía đối với AH). Dựng đường vuông góc với HM tại M, cắt Ax ở O. Từ đó dựng được tam giác.



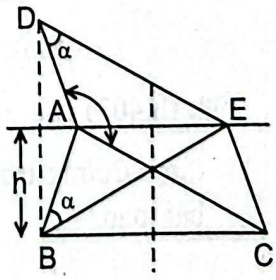
Hình 401

294. (h.402) Lấy E đối xứng với A qua đường trung trực của BC thì $\widehat{ABE} = \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$. Lấy D đối xứng với B qua AE thì B, C, D xác định và $\widehat{ADE} = \alpha$.

Ta có ADEC là hình bình hành nên

$\widehat{DAC} = 180^o - \widehat{ADE} = 180^o - \alpha$.

Từ đó dựng được đỉnh A.

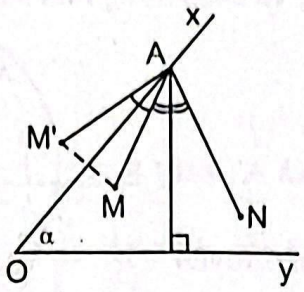


Hình 402

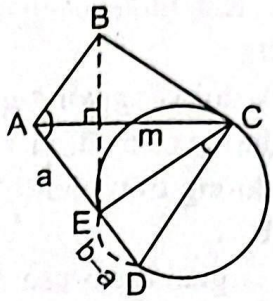
Scanned with CamScanner

295. (h.403) Lấy M' đối xứng với M qua Ox.

Chứng minh rằng $\widehat{M'AN} = 2(90^o - \alpha)$ với $\widehat{xOy} = \alpha$.



Hình 403



Hình 404

296. (h.404) Lấy E đối xứng với B qua AC. Chứng minh rằng $\widehat{DCE} = \alpha$.

Suy ra cách dựng:

– Dựng ED = b – a. Dựng cung chứa góc α dựng trên ED.

– Trên tia DE lấy A sao cho EA = a.

– Dựng đường tròn (A; m) cắt cung chứa góc α ở C.

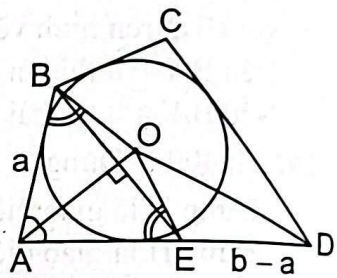
– Dựng B đối xứng với E qua AC.

297. (h.405) Gọi O là tâm của đường tròn nội tiếp tứ giác.

Giả sử b ≥ a. Lấy E đối xứng với B qua AO.

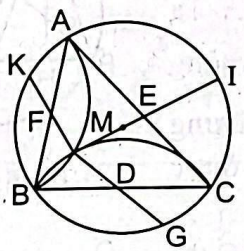
Thế thì ED = b – a, $\widehat{OEA} = \widehat{OBA} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Trước hết dựng ΔOED (g.c.g).

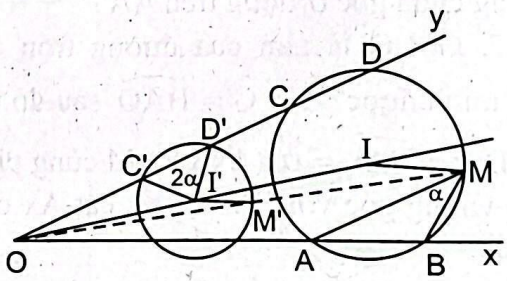


Hình 405

298. (h.406) Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Điểm M phải thuộc các cung đối xứng với cung BC qua D, đối xứng với cung AC qua E, đối xứng với cung AB qua F. Điểm M là trực tâm của ΔABC.



Hình 406

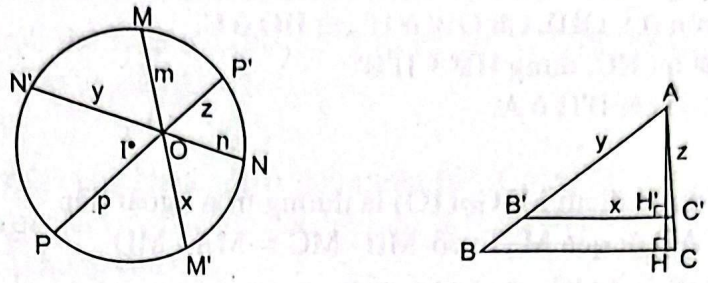


Hình 407

299. (h.407) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha$. Lấy I' bất kì thuộc tia phân giác của góc xOy. Dễ dàng dựng được đường tròn phụ (I') cắt Oy ở C', D' sao cho $\widehat{C'I'D'} = 2\alpha$. Bạn đọc tự giải tiếp bài toán.

Scanned with CamScanner

300. a) (h.408a) Dựng đường tròn (I) đi qua M, N, P. Gọi M', N', P' là giao điểm của MO, NO, PO với (I). Đặt OM' = x, ON' = y, OP' = z. Ta có mx = ny = pz.



Hình 408

b) (h.408b) ΔABC có ba đường cao bằng m, n, p nên ba cạnh tỉ lệ nghịch với m, n, p, do đó tỉ lệ thuận với x, y, z.

Dựng $\Delta AB'C'$ có B'C' = x, AB' = y, AC' = z.

Dựng $AH' \perp B'C'$. Trên tia AH' lấy điểm H sao cho AH' = m. Qua H, dựng đường thẳng song song với B'C', cắt AB' và AC' ở B và C.

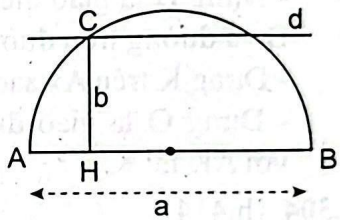
Điều kiện để có nghiệm hình là $\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{p} < \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

Lưu ý. Cách khác giải câu b: Xem Bài tập 181 *Nâng cao và phát triển Toán 8* Tập hai.

301. a) (h.409)

- Dựng đường tròn đường kính AB = a.
- Dựng đường thẳng d // AB và cách AB một khoảng bằng b.
- Kẻ $CH \perp AB$.

Ta có HA và HB là các đoạn thẳng phải dựng.

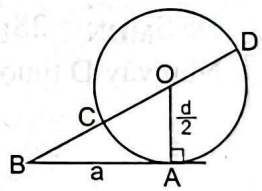


Hình 409

b) (h.410)

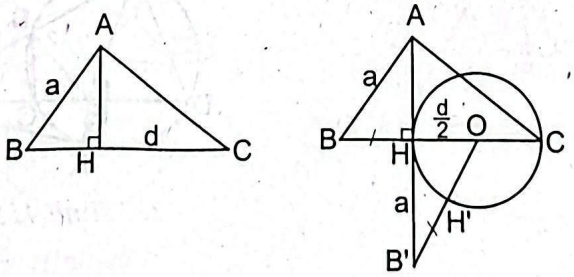
- Dựng ΔOAB vuông tại A có AB = a, $OA = \frac{d}{2}$.
- Dựng đường tròn (O; OA).
- Kẻ cát tuyến BCD đi qua O.

Ta có $BD - BC = CD = 2OA = d$ và $BD \cdot BC = BA^2 = a^2$.



Hình 410

c) (h.411) Ta có $BC - BH = HC = d$ và $BC \cdot BH = AB^2 = a^2$.



Hình 411

Theo câu a, dựng được độ dài BH. Từ đó dựng ΔABC.

Cách dựng được thể hiện trên hình vẽ.

Scanned with CamScanner

- Dựng $\Delta OHB'$ vuông tại H có $HB' = a$. $HO = \frac{d}{2}$.
- Dựng đường tròn (O; OH), cắt OB' ở H' cắt HO ở C.
- Trên tia đối của tia HC, dựng HB = H'B'.
- Dựng cung (B; a) cắt B'H ở A.

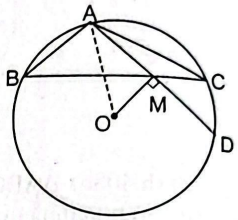
302. (h.412)

Giả sử đã dựng được điểm M. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vẽ dây AD đi qua M. Ta có $MB \cdot MC = MA \cdot MD$.

Ta lại có $MB \cdot MC = MA^2$ nên MA = MD.

Cách dựng

- Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.
- Dựng đường tròn đường kính OA, cắt BC ở M.



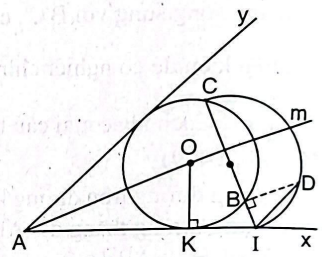
Hình 412

303. (h.413)

- Dựng tia phân giác Am của góc xAy.
- Dựng C đối xứng với B qua Am.
- Đưa về bài toán: Dựng đường tròn đi qua B, C và tiếp xúc với Ax (Ví dụ 56).

Cách dựng như hình vẽ:

- Dựng giao điểm I của CB và Ax.
- Dựng D là giao điểm của đường vuông góc với IC tại B và đường tròn đường kính IC.
- Dựng K trên Ax sao cho IK = ID.
- Dựng O là giao điểm của Am và đường vuông góc với AK tại K.



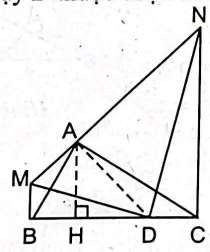
Hình 413

304. (h.414)

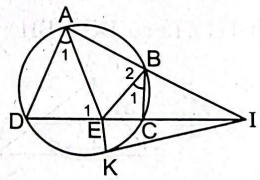
Ta có $\overset{\frown}{AMD} = \overset{\frown}{ABD}$, $\overset{\frown}{AND} = \overset{\frown}{ACD}$ nên $\Delta MDN \backsim \Delta BAC$ (g.g).

Để $S_{MDN} = 2S_{BAC}$ thì tỉ số các đường cao tương ứng DA và AH phải bằng $\sqrt{2}$.

Như vậy D thuộc đoạn thẳng HC sao cho HD = AH.



Hình 414



Hình 415

305. (h.415)

Ta có $\widehat{D} + \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ (ABCD là tứ giác nội tiếp)

mà $\widehat{D} + \widehat{A}_1 + \widehat{E}_1 = 180^\circ$ (xét ΔADE) và $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{E}_1$.

Scanned with CamScanner

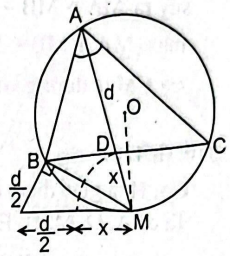
Giả sử AB cắt CD tại I (trường hợp AB // CD bài toán được giải dễ dàng). Ta có $\widehat{B}_2 = \widehat{E}_1$ nên $\overset{\frown}{IBE} = \overset{\frown}{IEA}$. Do đó $\Delta IBE \backsim \Delta IEA$ (g.g) nên $IE^2 = IA.IB = IC.ID$.

Cách dựng IE được thể hiện trên hình 415 trong đó IE = IK và IK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

306. (h.416)

Dựng BC = a. Dựng cung chứa góc α dựng trên BC. Gọi O là tâm của đường tròn chứa cung chứa góc trên, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A.

Đặt MB = n, MD = x.



Hình 416

$\Delta MAB \backsim \Delta MBD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MB}{MD}$

$\Rightarrow MD.MA = MB^2 \Rightarrow x(x + d) = n^2$

$\Rightarrow x^2 + xd + \dfrac{d^2}{4} = \dfrac{d^2}{4} + n^2 \Rightarrow \left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + n^2$.

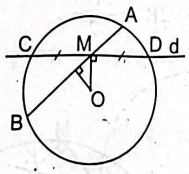
$x + \dfrac{d}{2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng $\dfrac{d}{2}$ và n.

Cách dựng được thể hiện trên hình 416.

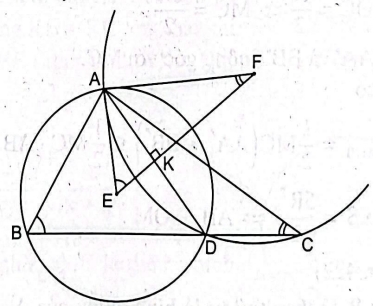
Chuyên đề 4. Toán cực trị

307. (h.417)

Gọi M là giao điểm của AB và d. Ta có tích MC.MD không đổi nên CD = MC + MD nhỏ nhất khi và chỉ khi MC = MD. Từ đó suy ra cách dựng: O là giao điểm của đường trung trực của AB và đường vuông góc với d tại M.



Hình 417



Hình 418

308. (h.418)

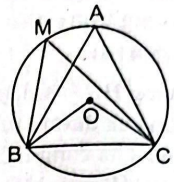
ΔAEF có $\widehat{E} = \widehat{B}$ và $\widehat{F} = \widehat{C}$ nên $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$.

Scanned with CamScanner

Gọi K là giao điểm của EF và AD thì AK là đường cao của ΔAEF.
Do đó S_{AEF} lớn nhất $\Leftrightarrow$ AK nhỏ nhất
$\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AD $\perp$ BC.

309. (h.419)

Ta có MA + MB = MC (dễ chứng minh),
suy ra MA + MB + MC = 2MC $\le$ 4R.
$\max(MA + MB + MC) = 4R$
$\Leftrightarrow$ CM là đường kính của (O).



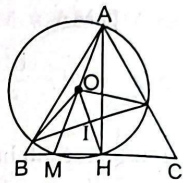
Hình 419

310. (h.420)

Gọi H là giao điểm của đường tròn (O) và BC.
Ta có A, D, M, H, E thuộc đường tròn (O) nên

$$\overset{\frown}{DOH} = 2\overset{\frown}{DAH} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

Tam giác cân DOH có $\overset{\frown}{DOH} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.
Tương tự ΔEOH đều.
Gọi I là giao điểm của DE và OH thì DE $\perp$ OH và DE = 2DI.
DI là đường cao của tam giác đều DOH nên



Hình 420

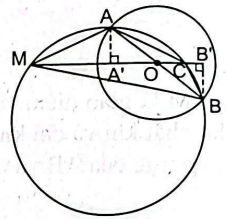
$$DI = OD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = AM \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \ge AH \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a}{8}.$$

Suy ra $DE \ge \frac{3a}{4}$; $\min DE = \frac{3a}{4} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC.

311. (h.421)

Ta có $OM \cdot OC = OA \cdot OB$
$\Rightarrow 2R \cdot OC = R^2$
$\Rightarrow OC = \frac{R}{2} \Rightarrow MC = \frac{5R}{2}$.

Kẻ AA' và BB' vuông góc với MC.
Ta có



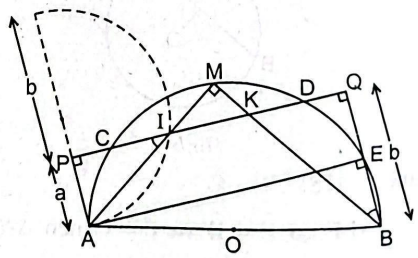
Hình 421

$$S_{MACB} = \frac{1}{2}MC\left(AA' + BB'\right) \le \frac{1}{2}MC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5R}{2} \cdot 2R = \frac{5R^2}{2}.$$

$$\max S = \frac{5R^2}{2} \Leftrightarrow AB \perp OM.$$

312. (h. 422)

Gọi P, Q theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên CD, ta có P và Q cố định.
Do PI + IK + KQ = PQ (hằng số) nên:
IK lớn nhất $\Leftrightarrow$ PI + KQ nhỏ nhất.
Đặt AP = a, BQ = b. Đặt PI = x, KQ = y.



Hình 422

Scanned with CamScanner

$\Delta AIP \backsim \Delta KBQ$

$\Rightarrow \dfrac{PI}{BQ} = \dfrac{AP}{KQ} \Rightarrow \dfrac{x}{b} = \dfrac{a}{y} \Rightarrow xy = ab.$

Do đó $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi

$x = y = \sqrt{ab}$.

Cách dựng độ dài PI được thể hiện trên Hình 422.

313. (h.423)

a) $\widehat{K_1} = \widehat{C_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow OK // ID.$

Ta có $ID \perp AB$ nên $OK \perp AB$.

Từ đó $KA = KB$.

b) $\widehat{D_2} = \widehat{KCB} = \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow FN // KB.$

Tương tự $EM // KA$.

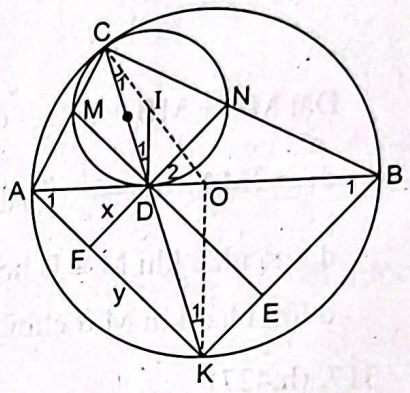
Hình bình hành DEKF có $\widehat{K} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

c) Đặt $DF = x$, $KF = y$. Gọi S là diện tích hình chữ nhật DEKF thì $S = xy$.

Ta có

$2\sqrt{xy} \le x + y = AF + FK = R\sqrt{2} \Rightarrow 4xy \le 2R^2 \Rightarrow xy \le \dfrac{R^2}{2}$.

$\max S = \dfrac{R^2}{2} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow DA = DB \Leftrightarrow D$ trùng O.



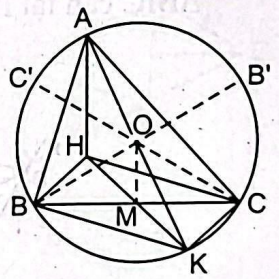
Hình 423

314. (h.424)

Vẽ đường kính AOK, gọi M là giao điểm của HK và BC. Ta có $HA = 2\,OM$ không đổi, $HB + HC = KB + KC$. Do đó

$HA + HB + HC$ lớn nhất $\Leftrightarrow KB + KC$ lớn nhất.

Vẽ các đường kính BB', CC'. Khi điểm A di chuyển trên cung B'C' thì điểm K di chuyển trên cung BC. Tổng $KB + KC$ lớn nhất khi và chỉ khi K là điểm chính giữa của cung BC (xem Ví dụ 61b). Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

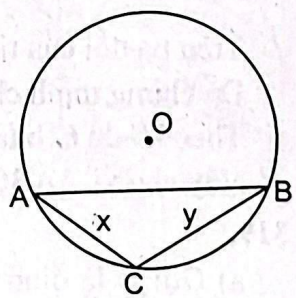


Hình 424

315. (h.425)

Đặt $CA = x$, $CB = y$. Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y}$.

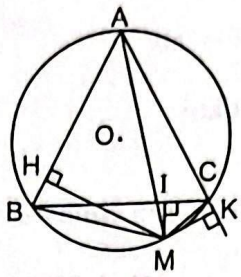
Do đó $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x + y$ lớn nhất $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của cung AB (xem Ví dụ 61 b).



Hình 425

Scanned with CamScanner

316. (h.426)



Hình 426

Đặt $MA + MB + MC = d_1$, $MH + MI + MK = d_2$, $d = d_1 + d_2$. Chứng minh rằng

$d_1 = 2MA$, $d_2 = \frac{1}{a}(2S_{ABC} + 4S_{MBC})$ với $AB = BC = CA = a$.

d nhỏ nhất khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$ (khi đó cả d_1 và d_2 đều nhỏ nhất).

d lớn nhất khi M ở chính giữa cung BC (khi đó cả d_1 và d_2 đều lớn nhất).

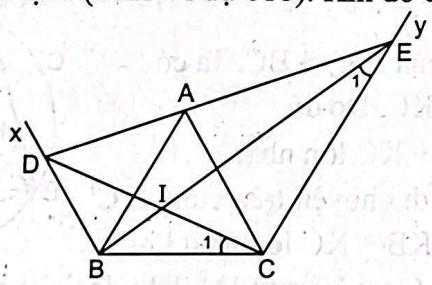
317. (h.427)

Ta có $\frac{DB}{BA} = \frac{AC}{CE}$ nên $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{CE}$.

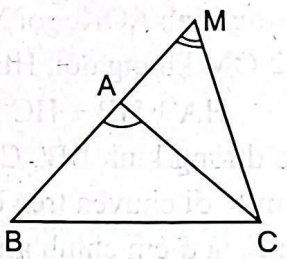
Từ đó $\Delta DBC \backsim \Delta BCE$ (c.g.c) suy ra $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$.

Do đó $\widehat{BIC} = \widehat{ICE} + \hat{E}_1 = \widehat{ICE} + \hat{C}_1 = 120^\circ$.

Tam giác BIC có BC cố định, $\widehat{BIC}$ không đổi nên chu vi ΔBIC lớn nhất khi và chỉ khi ΔBIC cân tại I (xem Ví dụ 61b). Khi đó d // BC.



Hình 427



Hình 428

318. (h.428)

Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $\widehat{AMC} = 60^\circ$.

Dễ chứng minh chu vi $\Delta ABC \leq$ chu vi ΔMBC.

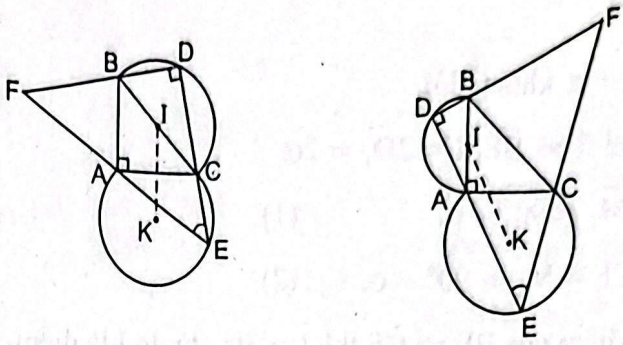
Theo Ví dụ 61b ta có chu vi ΔMBC lớn nhất khi ΔMBC đều.

Vậy chu vi ΔABC lớn nhất bằng 3a khi ΔABC là tam giác đều.

319.

a) Gọi D là đỉnh góc vuông. Giả sử cạnh huyền EF đi qua A. Ta thấy D thuộc cung chứa góc 90° dựng trên BC, E thuộc cung chứa góc 45° dựng trên AC (h.429a). Dễ dàng giải tiếp bài toán.

Scanned with CamScanner



Hình 429

b) Xét hai trường hợp:

– Cạnh huyền EF đi qua đỉnh góc vuông A (h. 429a). Gọi I, K là tâm của các cung chứa góc 90^o và 45^o nói trên. Ta tính được IK = 10 cm, DE ≤ 2IK = 20 cm (xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi DE // IK).

– Cạnh huyền EF đi qua đỉnh góc nhọn, chẳng hạn đi qua C (h.429b). Ta tính được IK = $5\sqrt{5}$cm, DE ≤ 2IK = $10\sqrt{5}$.

Ta thấy $10\sqrt{5} > 20$. Do đó diện tích lớn nhất của Δ DEF bằng $\frac{1}{2}(10\sqrt{5})^2 = 250\ (cm^2)$.

320. (h.430)

a) ΔEMC cân tại E nên

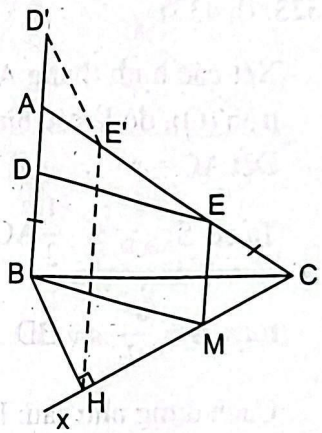
$$\widehat{ECM} = 90^o - \frac{\widehat{CEM}}{2} = 90^o - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Quỹ tích của M là tia Cx, trong đó $\widehat{ACx} = 90^o - \frac{\widehat{A}}{2}$,

Cx và B nằm cùng phía đối với AC.

b) DE nhỏ nhất ⇔ BM nhỏ nhất ⇔ M ≡ H (BH ⊥ Cx).

Khi đó E ở vị trí E', D ở vị trí D' với BHE'D' là hình bình hành.



Hình 430

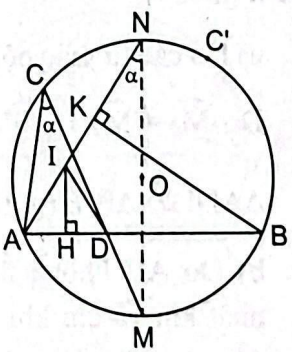
321. (h.431)

a) Gọi MN là đường kính của đường tròn (O).

Đường trung trực của AD cắt AN ở I. Ta sẽ chứng minh rằng I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

Thật vậy, đặt $\widehat{ACM} = \widehat{ANM} = \alpha$ thì $\widehat{AIH} = \alpha$ (H là trung điểm của AD) nên $\widehat{AID} = 2\alpha$. Do $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AID}$ nên đường tròn tâm I (có bán kính IA, ID) đi qua C, tức là I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

Quỹ tích của I là đoạn thẳng AN.

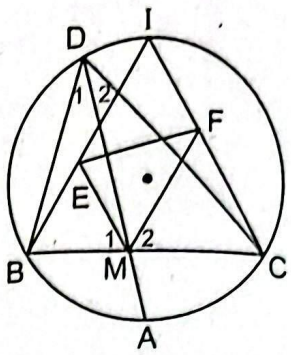


Hình 431

b) BI nhỏ nhất ⇔ I ≡ K (BK ⊥ AN). Vẽ đường tròn (K, KA), cắt (O) ở C', đó là vị trí phải tìm của điểm C.

Scanned with CamScanner

322. (h.432)



Hình 432

Đặt $\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \alpha$ không đổi.

ΔEBM cân tại E có $\widehat{BEM} = 2\widehat{D_1} = 2\alpha$

nên $\widehat{MBE} = \widehat{M_1} = 90^\circ - \alpha$. (1)

Tương tự $\widehat{MCF} = \widehat{M_2} = 90^\circ - \alpha$. (2)

Gọi I là giao điểm của BE và CF thì $\hat{I} = 2\alpha$, từ đó I là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MBE} = \widehat{M_2}$ nên MF // IB.

Tương tự ME // IC. Ta có MEIF là hình bình hành và $\widehat{EMF} = 2\alpha$. Đặt $S_{MEF} = S$,

ta có $S = \frac{1}{2} ME \cdot MF \sin 2\alpha$.

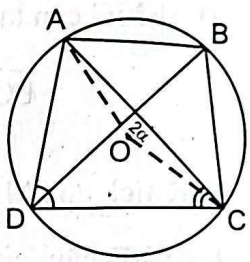
S lớn nhất $\Leftrightarrow$ ME · MF lớn nhất.

Ta lại có ME + MF = IB không đổi nên ME · MF lớn nhất $\Leftrightarrow$ ME = MF $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC.

323. (h.433)

Xét các hình thang ABCD (AB // CD) có $\hat{D} = \alpha$ nội tiếp đường tròn (O), đó là các hình thang cân có độ dài AC không đổi.

Đặt AC = a.



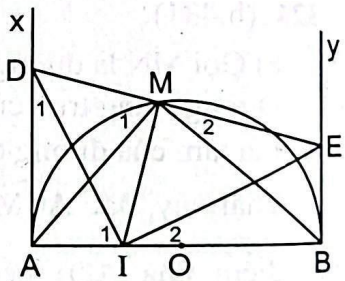
Hình 433

Ta có $S_{ABCD} \le \frac{1}{2} AC.BD$ (dễ chứng minh) nên

$\max S = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow BD \perp AC \Leftrightarrow \widehat{ACD} = 45^\circ$.

Cách dựng như sau: Dựng $\widehat{AOC} = 2\alpha$. Dựng dây CD sao cho $\widehat{ACD} = 45^\circ$. Dựng dây DB vuông góc với AC.

324. (h.434)



Hình 434

a) Do các tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{M_1} = \widehat{I_1}$, $\widehat{M_2} = \widehat{I_2}$.

Do $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ$ nên $\widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{I_2}$.

$\Delta ADI \backsim \Delta BIE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{BI} = \frac{AI}{BE} \Rightarrow AD.BE = AI.BI$.

b) Do AB không đổi nên diện tích hình thang ABED nhỏ nhất khi và chỉ khi AD + BE nhỏ nhất. Tích AD.BE không đổi nên AD + BE nhỏ nhất khi và chỉ khi AD = BE, khi đó IM $\perp$ AB.

Scanned with CamScanner

325. (h.435)

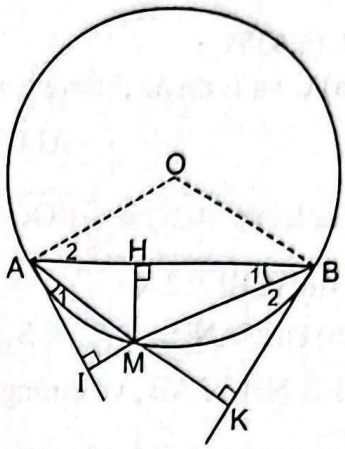
Kẻ MH ⊥ AB. Ta có

$\Delta MAI \backsim \Delta MBH$ (g.g) nên $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MA}{MB}$,

$\Delta MAH \backsim \Delta MBK$ (g.g) nên $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MH}{MK}$.

Suy ra $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MH}{MK}$.

Do đó $MI \cdot MK = MH^2$. Điểm M phải tìm là điểm chính giữa cung AB.



Hình 435

325. (h.436)

Từ các tứ giác nội tiếp ADME và ABCM, ta có $\overset{\frown}{MDE} = \overset{\frown}{MAE} = \overset{\frown}{MBC}$,

$\overset{\frown}{MED} = \overset{\frown}{MAD} = \overset{\frown}{MCB}$, do đó $\Delta MDE \backsim \Delta MBC$ (g.g), suy ra $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{ME}{MC}$.

Ta lại có $ME \le MC$ nên $DE \le BC$.

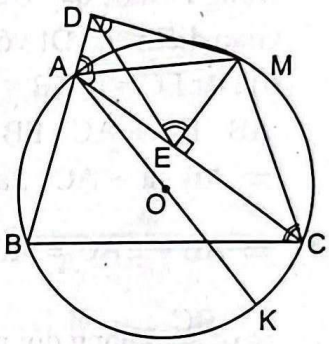
Do đó max DE = BC $\Leftrightarrow$ ME = MC $\Leftrightarrow$ MC ⊥ AC

$\Leftrightarrow$ M trùng K (K đối xứng với A qua O).

Chú ý. $DE \le AM \le AK$ nhưng không thể kết luận max DE = AK vì không xảy ra được DE = AK. Thật vậy,

$$DE = AK \Leftrightarrow \begin{cases} DE = AM \\ AM = AK \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{DE đi qua trung điểm của AM} & (1) \\ \text{AM đi qua O} & (2) \end{cases}$$



Hình 436

Không đồng thời xảy ra (1) và (2), vì khi AM đi qua O thì DE = BC, mà BC không đi qua O, tức là DE không đi qua trung điểm của AM.

327. (h.437) Dễ thấy $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{a}{2}. \quad (1)$$

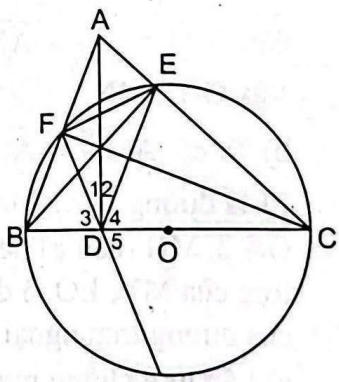
Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Dễ chứng minh $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên $\widehat{D_3} = \widehat{D_4}$. Gọi K là giao điểm của FD với (O). Ta có $\widehat{D_4} = \widehat{D_3} = \widehat{D_5}$ nên K đối xứng E qua BC, suy ra DE = DK.

Do đó DF + DE = DF + DK = EK ≤ BC = a. (2)

Từ (1) và (2) suy ra chu vi $\Delta DEF \le \dfrac{3a}{2}$.

Chu vi ΔDEF lớn nhất bằng $\dfrac{3a}{2}$

$\Leftrightarrow$ EK là đường kính của (O) $\Leftrightarrow$ D trùng O $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.



Hình 437

Scanned with CamScanner

328. (h.438)

a) C và E thuộc đường tròn đường kính AO nên

$$\overset{\frown}{AEC} = \overset{\frown}{AOC}.$$

Ta lại có $\overset{\frown}{AOC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BOC} = \overset{\frown}{BIC}$ nên $\overset{\frown}{AEC} = \overset{\frown}{BIC}$.

Suy ra BI // AN.

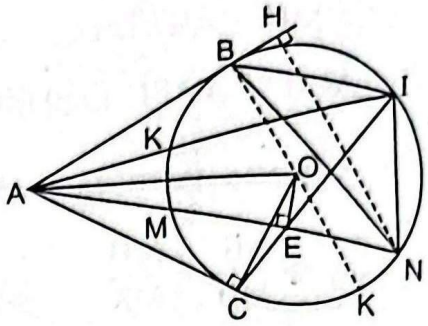
b) BI // AN $\Rightarrow S_{AIN} = S_{ABN}$.

Kẻ NH $\perp$ AB, vẽ đường kính BOK.

Ta có $S_{ABN} = \frac{1}{2}AB \cdot NH$.

Ta lại có NH $\leq$ NB $\leq$ BK.

Do đó S_{AIN} lớn nhất $\Leftrightarrow$ NH lớn nhất $\Leftrightarrow$ N trùng K.



Hình 438

329. (h.439) a) Dựng D là điểm chính giữa cung lớn BC.

Dựng I thuộc dây BC sao cho IB = 2IC.

Giao điểm của DI với (O) là điểm E phải dựng.

b) Đặt EC = a, EB = 2a. Theo định lí Ptoleme:

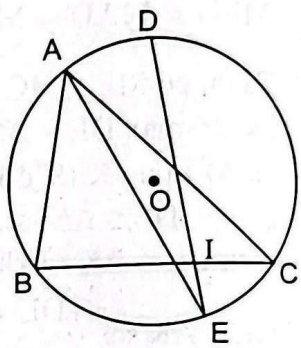
$AB \cdot EC + AC \cdot EB = AE \cdot BC$

$\Rightarrow AB \cdot a + AC \cdot 2a = AE \cdot BC$

$\Rightarrow AB + 2AC = AE \cdot \frac{BC}{a}$.

Do $\frac{BC}{a}$ không đổi nên AB + 2AC lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE lớn nhất

$\Leftrightarrow$ AE là đường kính của (O).



Hình 439

330. (h.440) a) $\overset{\frown}{AMN} = \hat{A}_1 = \hat{C} = \hat{A}_2$.

Ta lại có $\overset{\frown}{AMN} + \overset{\frown}{ANM} = 90^\circ$

nên $\hat{A}_2 + \overset{\frown}{ANM} = 90^\circ$.

Vậy OA $\perp$MN.

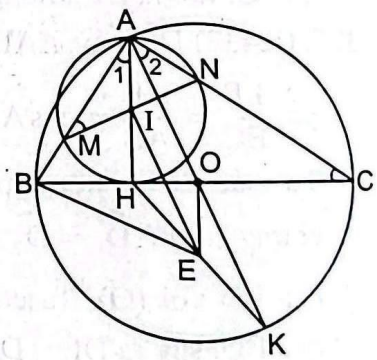
b) Ta có $\overset{\frown}{AMN} = \hat{A}_1 = \hat{C}$ nên BMNC là tứ giác nội tiếp.

EI là đường trung bình của ΔKHA nên EI // KA. Ta lại có OA $\perp$ MN (câu a) nên EI $\perp$ MN. Ta có EI là đường trung trực của MN, EO là đường trung trực của BC nên E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC.

c) Lần lượt chứng minh:

EB lớn nhất $\Leftrightarrow$ EO lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ H trùng O.

Khi đó OA $\perp$ BC.



Hình 440

Scanned with CamScanner

331. (h.441)

a) $\overset{\frown}{BNC} = \overset{\frown}{BNM} + \overset{\frown}{MNC} = \overset{\frown}{ABM} + \overset{\frown}{ACM}$ nên $\overset{\frown}{BNC} + \overset{\frown}{BAC} = 180^\circ$, suy ra ABNC là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của NM và đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Ta có

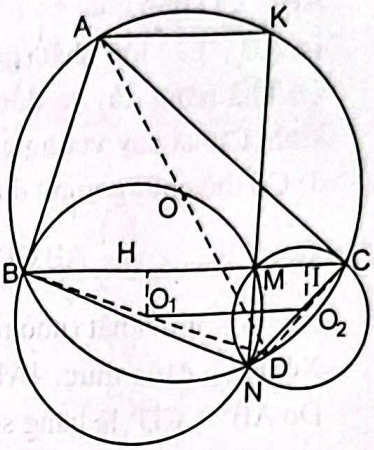
$\overset{\frown}{KAC} = \overset{\frown}{KNC} = \overset{\frown}{ACM}$

nên AK // BC. Điểm K là điểm cố định.

c) Kẻ O_1H và O_2I vuông góc với BC.

Ta có $O_1O_2 \geq HI = \dfrac{BC}{2}$.

Xảy ra $O_1O_2 = HI$ khi và chỉ khi O_1O_2 // BC. Gọi D là giao điểm của BO_1 và CO_2 thì AD là đường kính của đường tròn (O) nên D là điểm cố định. Do O_1O_2 // BC và $O_1O_2 = \dfrac{BC}{2}$ nên O_1O_2 là đường trung bình của ΔBDC, dễ thấy khi đó M là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BC.



Hình 441

332. (h.442)

a) Đặt OI = d (hằng số). Ta có:

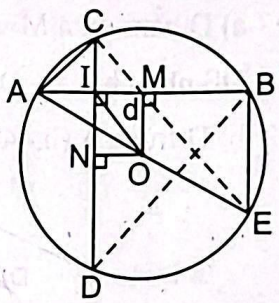
$$OM^2 + ON^2 = OM^2 + MI^2 = OI^2 = d^2,$$

$$AB^2 + CD^2 = 4BM^2 + 4DN^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2)$$

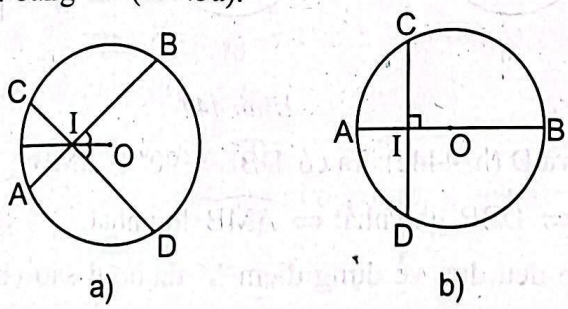
$$= 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - 4d^2 = 4(2R^2 - d^2).$$

Vẽ đường kính AE. Dễ chứng minh CBED là hình thang cân, BD = CE. Do đó $AC^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4R^2$.

b) Bạn đọc tự chứng minh hình chữ nhật OMIN có diện tích (chu vi) lớn nhất khi nó là hình vuông. Khi đó các tia IB, ID tạo với tia IO các góc bằng 45° (h.443a).



Hình 442



Hình 443

c) Ta có

$(AB + CD)^2 + (AB - CD)^2 = 2(AB^2 + CD^2) = 8(2R^2 - d^2)$, là hằng số.

Do đó AB + CD lớn nhất

$\Leftrightarrow (AB + CD)^2$ lớn nhất

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow (AB - CD)^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AB = CD$.

Khi đó OMIN là hình vuông, các tia IB và ID tạo với tia IO các góc bằng 45^0 (h.443a).

$AB + CD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AB + CD)^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AB - CD)^2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow AB - CD$ lớn nhất (giả sử $AB \geq CD$).

Có khả năng xảy ra đồng thời AB lớn nhất và CD nhỏ nhất, đó là khi AB là đường kính, CD là dây vuông góc với AB tại I (h.443b).

d) Có thể chứng minh dựa vào câu c. Sau đây là chứng minh trực tiếp:

Ta có $S_{ACBD} = \frac{1}{2}AB.CD \Rightarrow 4S^2 = AB^2.CD^2$.

Do đó S^2 lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow AB^2.CD^2$ lớn nhất (nhỏ nhất).

Xét hằng đẳng thức: $4AB^2.CD^2 = (AB^2 + CD^2)^2 - (AB^2 - CD^2)^2$

Do $AB^2 + CD^2$ là hằng số (câu a) nên $AB^2.CD^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow (AB^2 - CD^2)^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AB = CD$. Khi đó các tia IB, ID tạo với tia IO các góc bằng 45^0 (h.443a).

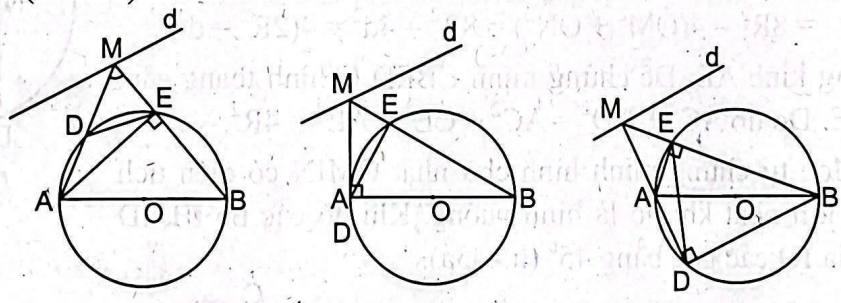
$AB^2.CD^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AB^2 - CD^2)^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow AB^2 - CD^2$ lớn nhất (giả sử $AB \geq CD$). Xảy ra được đồng thời AB lớn nhất và CD nhỏ nhất (h.443b).

333. Ta biết rằng dây DE nhỏ nhất khi và chỉ khi góc nội tiếp chắn cung DE là nhỏ nhất. Xét ba trường hợp:

a) D nằm giữa M và A (h. 444a): Ta có $\widehat{DAE} = 90^0 - \widehat{AMB}$ nên

DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{DAE}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{AMB}$ lớn nhất.

b) D trùng A (h.444b): Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{DBE}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{AMB}$ lớn nhất.



Hình 444

c) A nằm giữa M và D (h. 444c): Ta có $\widehat{DBE} = 90^0 - \widehat{AMB}$

nên DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{DBE}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{AMB}$ lớn nhất.

Cả ba trường hợp đều đưa về dựng điểm M thuộc d sao cho $\widehat{AMB}$ lớn nhất, xem Ví dụ 62.

334. (h.445) Gọi S là diện tích ΔHIK. Từ các tứ giác nội tiếp ta có

$\widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 90^0$ nên $IH \perp IK$.

Đặt $\widehat{I_1} = \alpha$.

Scanned with CamScanner

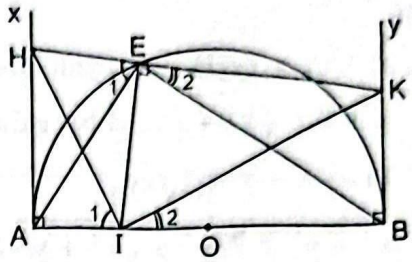
Ta có $S = \frac{1}{2}IH \cdot IK = \frac{1}{2} \cdot \frac{IA}{\cos\alpha} \cdot \frac{IB}{\sin\alpha}$.

Do $2\sin\alpha\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

nên $S \ge IA \cdot IB = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$.

$\min S = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$

$\Leftrightarrow AH = \frac{R}{2}, BK = \frac{3R}{2}$.



Hình 445

335. (h.446)

a) Ta có $CE^2 = BC^2 - BE^2$, $BF^2 = BC^2 - CF^2$

mà $BE \le CF$ (do $AC \ge AB$)

nên $CE^2 \ge BF^2$, suy ra $CE \ge BF$.

b) $BC^2 = BC(BD + CD) = BC \cdot BD + CB \cdot CD$.

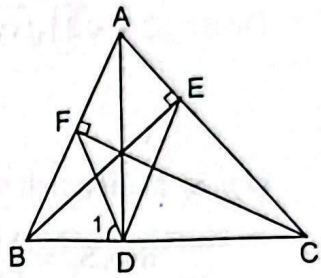
Từ các tứ giác nội tiếp ta có

$BC \cdot BD = BA \cdot BF$, $CB \cdot CD = CA \cdot CE$

nên $BC^2 = BA \cdot BF + CA \cdot CE$.

c) Tứ giác AFDC nội tiếp nên $\widehat{D_1} = \widehat{BAC}$, suy ra $\Delta BDF \backsim \Delta BAC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{DF}{AC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow DF = \frac{AC \cdot CF}{BC}$.



Hình 446

Kí hiệu $AC = b$, $AB = c$, $CE = x$, $BF = y$. Ta có $DF = \frac{by}{a}$, tương tự $DE = \frac{cx}{a}$.

Do đó $DE + DF = \frac{cx + by}{a}$. Cần chứng minh $DE + DF \le BC \Leftrightarrow \frac{cx + by}{a} \le a^2$.

Theo câu b ta có $a^2 = cy + bx$ nên cần chứng minh

$cx + by \le cy + bx \Leftrightarrow c(x - y) \le b(x - y)$.

Bất đẳng thức cuối đúng vì $b \ge c$ (giả thiết) và $x \ge y$ (câu a).

Vậy $\min(DE + DF) = a \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

336. (h.447)

Xét hình thang cân ABCD (AB // CD) ngoại tiếp đường tròn (O; r).

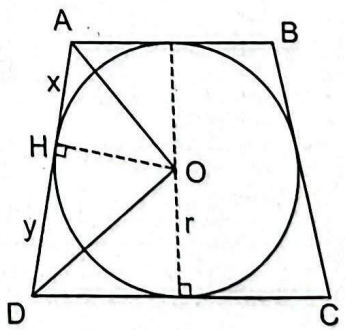
Kẻ $OH \perp AD$. Đặt $HA = x$, $HD = y$.

ΔAOD vuông nên $OH^2 = HA \cdot HB$ suy ra $r^2 = xy$.

Ta có $S = (AB + CD)r = (x + y) \cdot 2r$,

$x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2r$ nên $S \ge 4r^2$.

$\min S = 4r^2 \Leftrightarrow x = y = 2r \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.



Hình 447

Scanned with CamScanner

337. M là tâm của lục giác đều.

338.

a) Gọi x, y là các cạnh góc vuông của tam giác vuông. Chu vi tam giác bằng $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ và bằng 2a.

Ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy}$,

$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy}$.

Suy ra $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \left(2 + \sqrt{2}\right)\sqrt{xy}$.

Do đó $\left(2 + \sqrt{2}\right)\sqrt{xy} \leq 2a \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \dfrac{2a}{2 + \sqrt{2}} = a\left(2 - \sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow xy \leq a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 = a^2\left(6 - 4\sqrt{2}\right).$$

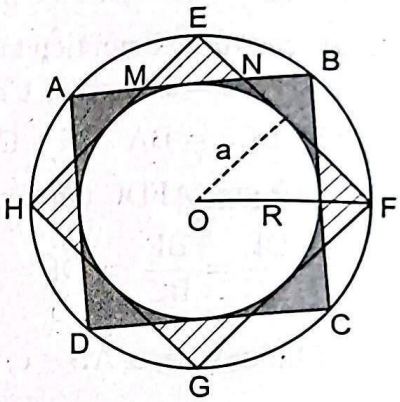
Gọi S_1 là diện tích tam giác. Ta có

$$\max S_1 = \frac{xy}{2} = a^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = y.$$

b) (h.448) Gọi ABCD và EFGH là hai hình vuông nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi (O; a) là đường tròn nội tiếp hai hình vuông đó.

Gọi S là diện tích bát giác thì $S = S_{EFGH} - 4S_{EMN}$, do đó diện tích phần chung của hai hình vuông nhỏ nhất khi S_{EMN} lớn nhất.

Dễ chứng minh ΔEMN có chu vi bằng 2a. Theo câu a thì $\max S_{AEM} = a^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.



Hình 448

Do đó

$$S = S_{EFGH} - 4S_{EMN} \geq 4a^2 - 4a^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 8a^2\left(\sqrt{2} - 1\right) = 4R^2\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

$\min S = 4R^2\left(\sqrt{2} - 1\right) \Leftrightarrow$ bát giác là bát giác đều.

Scanned with CamScanner

MỤC LỤC

	Trang	
	Đề bài	Lời giải, chỉ dẫn hoặc đáp số
ĐẠI SỐ	**3**	
Chương IV – HÀM SỐ $y = ax^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	3	137
§1. Hàm số $y = ax^2$	3	137
§2. Phương trình bậc hai một ẩn	5	138
§3. Hệ thức Viète và ứng dụng	10	142
§4. Phương trình quy về phương trình bậc hai	15	147
§5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	31	162
BÀI HỌC THÊM. Phương trình đại số bậc cao	34	
CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ	**39**	
Chuyên đề 1. Quan hệ giữa parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = mx + n$	39	166
Chuyên đề 2. Điều kiện và nghiệm của một phương trình	42	169
Chuyên đề 3. Đa thức bậc hai với bất đẳng thức và toán cực trị	49	172
HÌNH HỌC PHẲNG	**56**	
Chương III – ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP	56	178
§1. Góc nội tiếp	56	178
§2. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây	67	192
§3. Cung chứa góc	72	197
§4. Tứ giác nội tiếp	75	199
§5. Tứ giác ngoại tiếp	99	242
§6. Đa giác đều	102	246
§7. Đa giác đều nội tiếp, ngoại tiếp	104	247
BÀI ĐỌC THÊM. Những điều có thể bạn chưa biết về số π	105	
CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC	**109**	
Chuyên đề 1. Một số bài toán nổi tiếng	109	248
Chuyên đề 2. Quỹ tích	116	254
Chuyên đề 3. Dựng hình	124	266
Chuyên đề 4. Toán cực trị	130	275

Scanned with CamScanner

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn
các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Tổ chức và chịu trách nhiệm bản thảo:
Phó Tổng biên tập TRẦN QUANG VINH
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHẠM THỊ HỒNG

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ MINH THU – ĐỖ CHÂU GIANG
Thiết kế sách: PHẠM NGỌC THÀNH
Trình bày bìa: LÊ THẾ HẢI
Sửa bản in: VŨ THỊ THANH TÂM – TẠ THỊ HƯỜNG
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
và Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội.
Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội.

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9 – TẬP HAI

Mã số: G0LH9T002H24 - TTS
In 10.000 bản (QĐ in số: 017TK), khổ: 17 x 24 cm.
Đơn vị in: Xí nghiệp Bản đồ 1 - CN Công ty TNHH MTV Trắc địa Bản đồ
Địa chỉ: Phố Đàm Quang Trung, tổ 7, P. Phúc Đồng, Q. Long Biên, TP. Hà Nội
Số ĐKXB: 741-2024/CXBIPH/9-550/GD
Số QĐXB: 1875/QĐ-GD-HN ngày 14 tháng 5 năm 2024
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2024
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-42162-3
Tập hai: 978-604-0-42163-0

Scanned with CamScanner